מבוא להסתברות

© ארזים

15 במאי 2016

1 שונות של סכום של משתנים מקריים

טענה 1.1 אם X, Y בעלי שונות סופית אזי

$$\mathrm{Var}\left(X+Y\right)=\mathrm{Var}\left(X\right)+\mathrm{Var}\left(Y\right)+2\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$$

באופן כללי, אם $X_1,\ldots,X_n$ בעלי שונות סופית, אזי

$$\mathrm{Var}\left(X_1+\cdots+X_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_i\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)$$

הוכחה: באינדוקציה, $X_1+\cdots+X_n$ בעל שונות סופית. נחשב:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(X_1+\cdots+X_n\right) &= \mathbb{E}\left(\left(X_1+\cdots+X_n-\mathbb{E}\left(X_1+\cdots+X_n\right)\right)^2\right)= \\
&= \mathbb{E}\left(\left(X_1-\mathbb{E}\left(X_1\right)+\cdots+X_n-\mathbb{E}\left(X_n\right)\right)^2\right)= \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(X_i-\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)\left(X_j-\mathbb{E}\left(X_j\right)\right)\right)= \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_i\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)
\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.2 אם $X_1,\ldots,X_n$ בעלי שונות סופית ובלתי־תלויים אזי

$$\mathrm{Var}\left(X_1+\cdots+X_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_i\right)$$

דוגמה משתנים בלתי מתאומים אבל תלויים:

$$X\sim\begin{cases}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{cases},X^{2}\sim\begin{cases}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{cases}$$

המשתנים הללו אינם בלתי תלויים, אבל הם בלתי־מתואמים:

$$\mathrm{Cov}\left(X,X^{2}\right)=\mathbb{E}\left(X^{3}\right)-\mathbb{E}\left(X\right)\cdot\mathbb{E}\left(X^{2}\right)=\mathbb{E}\left(X\right)-\mathbb{E}\left(X\right)\cdot\mathbb{E}\left(X^{2}\right)=0$$

וזאת משום שמתקיים $X^{3}=X,\mathbb{E}\left(X\right)=0$.

דוגמה $X_{1},\dots,X_{n}$ בלתי תלויים ושווי התפלגות כך שמתקיים

$$X_{1}\sim\begin{cases}1 & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{cases}$$

כעת, ברור כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_{1}+\cdots+X_{n}\right) & = 0\\ \mathrm{Var}\left(X_{1}+\cdots+X_{n}\right) & = n\cdot\mathrm{Var}\left(X_{1}\right)=n\end{aligned}$$

סטיית התקן של הסכום היא $\sqrt{n}$.

דוגמה

$$\begin{aligned}Y & \sim \mathrm{Bin}\left(n,p\right)\\ \mathbb{E}\left(Y\right) & = np\\ \mathrm{Var}\left(Y\right) & = np\left(1-p\right)\end{aligned}$$

נוכיח את השונות: נגדיר $X_{1},\dots,X_{n}$ בלתי תלויים ושווי התפלגות, כך שמתקיים

$$X_{1}\sim\mathrm{Ber}\left(p\right)$$

כעת, $X_{1}+\cdots+X_{n}\sim\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$. כעת, מהמסקנה,

$$\mathrm{Var}\left(X_{1}+\cdots+X_{n}\right)=n\cdot\mathrm{Var}\left(X_{1}\right)=n\cdot p\left(1-p\right)$$

2 מקדם מתאם

עבור משתנים מקריים X,Y בעלי שונות סופית ולא קבועים, נגדיר את <u>מקדם המתאם</u> שלהם:

$$\rho\left(X,Y\right):=\frac{\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)}{\mathrm{Std}\left(X\right)\cdot\mathrm{Std}\left(Y\right)}$$

2.1 תכונות

1. $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$
2. לכל a ממשי, $\rho(X+a,Y)=\rho(X,Y)$, $\rho(aX,Y)=\frac{a}{|a|}\rho(X,Y)$ ($a\neq 0$)
3. $\rho(X,X)=1$
4. $\operatorname{Cov}(X,Y)=0 \iff \rho(X,Y)=0$

משפט 2.1 מתקיים:

1. $|\rho(X,Y)|\leq 1$
2. ערכי קצה:

(א) אם $\rho(X,Y)=1$ אזי קיימים $a>0$, b ממשיים כך שמתקיים $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$.

(ב) אם $\rho(X,Y)=-1$, אזי קיימים $a<0$, b ממשיים כך שמתקיים $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$.

הוכחה: נוכיח מקרה פרטי. להסיק את המקרה הכללי - תרגיל. נניח כי

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y)=0\\ \operatorname{Var}(X) &= \operatorname{Var}(Y)=1\end{aligned}$$

כעת נוכיח את הסעיף הראשון:

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathbb{E}\left((X-Y)^2\right)=\mathbb{E}\left(X^2+Y^2-2XY\right)=\mathbb{E}\left(X^2\right)+\mathbb{E}\left(Y^2\right)-2\mathbb{E}(XY)=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(X)-2\operatorname{Cov}(X,\\ &= 2-2\operatorname{Cov}(X,Y)\\ 1 &\leq \operatorname{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

כדי לקבל את האי שוויון $\operatorname{Cov}(X,Y)\geq -1$ נתחיל עם $\mathbb{E}\left((X+Y)^2\right)$.

הסעיף השני: בהוכחה של הסעיף הראשון ראינו ששוויון לאחת מתקבל אם ורק אם $\mathbb{P}(X=Y)=1$. זה החלק הראשון - החלק השני מתקבל באותה צורה, עם מינוס אחת, $\mathbb{P}(X=-Y)=1$. ■

3 אי שוויון מרקוב

אם X משתנה מקרי אי שלילי אז לכל $t>0$

$$\mathbb{P}(X\geq t)\leq\frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$