מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

8 במאי 2016

1 שונות

ניזכר בהגדרות שראינו:

הגדרה 1.1 עבור משתנה מקרי X בכל תוחלת סופית, השונות של X היא

$$\mathrm{var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}X\right)^{2}\right)$$

השונות תמיד מוגדרת, אולי אינסופית.
סטיית התקן של X היא

$$\mathrm{std}\left(x\right)=\sigma\left(x\right)=\sqrt{\mathrm{var}\left(X\right)}$$

דוגמא $X\sim\mathrm{Ber}\left(p\right)$. מה השונות של X?

$$\begin{aligned}X & \sim\begin{cases}1 & p\\0 & 1-p\end{cases}\\ \mathbb{E}X & = p\\ \mathrm{var}\left(X\right) & = \mathbb{E}\left(\left(X-p\right)^{2}\right)=\left(1-p\right)^{2}\cdot p+\left(0-p\right)^{2}\cdot\left(1-p\right)=\\ & = p\left(1-p\right)\left(1-p+p\right)=p\left(1-p\right)\end{aligned}$$

תרגיל יהי X משתנה מקרי ממשי.

1. אם $\mathbb{E}\left(\left(X-a\right)^{2}\right)$ סופית עבור a כלשהו אז היא סופית לכל a.
2. X בעל שונות סופית (ובפרט בעל תוחלת סופית) אם ורק אם $\mathbb{E}\left(X^{2}\right)$.

1.1 תכונות בסיסיות של שונות

יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופית.

טענה 1.2 $\mathrm{var}\left(X\right)\geq 0$, וכן $\mathrm{var}\left(X\right)=0$ אם ורק אם $\mathbb{P}\left(X=\mathbb{E}X\right)=1$.

הוכחה:

$$f\left(X\right)=\left(X-\mathbb{E}X\right)^{2}$$

זו פונקציה אי שלילית, לכן $\mathbb{E}\left(f\left(X\right)\right)\geq 0$, ושוויון אם ורק אם $\mathbb{P}\left(f\left(X\right)=0\right)=1$, כלומר $\mathbb{P}\left(X=\mathbb{E}X\right)=1$ (נובע ממונוטוניות התוחלת). ■

טענה 1.3 $\mathrm{var}\left(aX\right)=a^{2}\mathrm{var}\left(X\right)$.

הוכחה:

$$\mathrm{var}\left(aX\right)=\mathbb{E}\left(\left(aX-\mathbb{E}\left(aX\right)\right)^{2}\right)=\mathbb{E}\left(\left(aX-a\mathbb{E}X\right)^{2}\right)=a^{2}\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}X\right)^{2}\right)=a^{2}\mathrm{var}\left(X\right)$$

■

טענה 1.4 $\mathrm{var}\left(X+b\right)=\mathrm{var}\left(X\right)$.

הוכחה:

$$\mathrm{var}\left(X+b\right)=\mathbb{E}\left(\left(X+b-\mathbb{E}\left(X+b\right)\right)^{2}\right)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}X\right)^{2}\right)=\mathrm{var}\left(X\right)$$

■

טענה 1.5 $\mathrm{var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left(X^{2}\right)-\left(\mathbb{E}X\right)^{2}$ (גם כאשר ידוע מראש רק שהמשתנה X בעל תוחלת סופית).

הוכחה:

$$\mathrm{var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}X\right)^{2}\right)=\mathbb{E}\left(X^{2}-2\mathbb{E}X\cdot X+\left(\mathbb{E}X\right)^{2}\right)=\mathbb{E}\left(X^{2}\right)-2\left(\mathbb{E}X\right)^{2}+\left(\mathbb{E}X\right)^{2}=\mathbb{E}\left(X^{2}\right)-\left(\mathbb{E}X\right)^{2}$$

■

1.2 שונות משותפת

יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי שונות סופית.

הגדרה 1.6 <u>השונות המשותפת</u> של X,Y היא

$$\mathrm{cov}\left(X,Y\right)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}X\right)\left(Y-\mathbb{E}Y\right)\right)$$

בפרט, מתקיים

$$\operatorname{cov}(X,X)=\operatorname{var}(X)$$

הגדרה 1.7 X,Y הם בעלי מתאם חיובי אם $\operatorname{cov}(X,Y)>0$, בעלי מתאם שלילי אם $\operatorname{cov}(X,Y)<0$, ובלתי מתואמים אם $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

טענה 1.8 אם X,Y בעלי שונות סופית, אזי גם $\mathbb{E}\left(|X\cdot Y|\right),\mathbb{E}\left((X-Y)^2\right),\mathbb{E}\left((X+Y)^2\right)$ סופית.

הוכחה: מתקיים $(X+Y)^2\leq 2\left(X^2+Y^2\right)$, ולכן

$$\mathbb{E}\left((X+Y)^2\right)\leq\mathbb{E}\left(2\left(X^2+Y^2\right)\right)=2\mathbb{E}\left(X^2\right)+2\mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

ואלה סופיות משום שהנחנו שהשונות סופית. באותה צורה מקבלים עבור $(X-Y)^2$. כעת נבחין כי $X\cdot Y=\frac{1}{4}\left((X+Y)^2-(X-Y)^2\right)$, ולכן גם התוחלת של $X\cdot Y$ מוגדרת וסופית. ■

מסקנה 1.9 אם X,Y בעלי שונות סופית אזי השונות המשותפת שלהם מוגדרת וסופית.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\right)=\mathbb{E}\left((X\cdot Y)-\mathbb{E}X\cdot Y-X\cdot\mathbb{E}Y-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y\right)=\\ &= \mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y+\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y=\mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.10 בתנאים של המסקנה הקודמת,

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

1.2.1 תכונות של שונות משותפת

יהיו X,Y משתנים מקרים בעלי שונות סופית.

טענה 1.11 אם X,Y בלתי־תלויים אזי $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, כלומר הם בלתי מתואמים.

הוכחה:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\right)=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)\cdot\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y)=0\cdot 0=0$$

■

טענה 1.12 $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.

הוכחה: ברור מההגדרה. $\blacksquare$

טענה 1.13 $\operatorname{cov}(aX,bY)=a\cdot b\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$.

הוכחה: מיידי מהנוסחה שהוכחנו עבור שונות משותפת. $\blacksquare$

טענה 1.14 אם Z משתנה מקרי בעל שונות סופית אזי $\operatorname{cov}(X+Z,Y)=\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Z,Y)$.

הוכחה: גם כן מיידי מהנוסחה שהוכחנו עבור שונות משותפת. $\blacksquare$