מבוא להסתברות

ארזים ©

10 באפריל 2016

1 התפלגויות נפוצות

1.1 התפלגות ברנולי - $\mathrm{Ber}\left(p\right)$

זוהי התפלגות μ על $\{0,1\}$ כך שמתקיים $\mu\left(1\right)=p,\mu\left(0\right)=1-p$. כמובן שמתקיים $0\leq p\leq 1$. למשל, אם A מאורע עם הסתברות p, ונגדיר $X=1_A$ המשתנה המקרי האינדיקטור של A, אזי $X\sim\mathrm{Ber}\left(p\right)$.

1.2 התפלגות בינומית - $\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$

מבצעים $n\geq 1$ (שלם) ניסויים עם הסתברות $0\leq p\leq 1$ להצלחה. זו התפלגות μ על $\{0,1,\ldots,n\}$ כך שמתקיים

$$\mu\left(k\right)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$

נוכיח שאכן מדובר בהתפלגות: ברור שלכל k מתקיים $\mu\left(k\right)\geq 0$. ואכן, מתקיים גם

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}=\left(p+\left(1-p\right)\right)^n=1$$

וזאת בגלל נוסחת הבינום של ניוטון.

התפלגות זו עולה למשל בהקשר הבא: יהיו $X_1,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי־תלויים שמתפלגים $\mathrm{Ber}\left(p\right)$. אזי המשתנה המקרי שהוא סכומם מקיים

$$X_1+\ldots+X_n\sim\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$$

הוכחה: נסמן $S_n=X_1+\ldots+X_n$. ברור שמשתנה זה מקבל ערכים בקבוצה $\{0,\ldots,n\}$ בהסתברות 1, כי כל X_i מקבל ערכים בקבוצה $\{0,1\}$ בהתסברות 1.

עבור $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ נגדיר מאורע

$$A_I=\bigcap_{i\in I}\{X_i=1\}\bigcap_{i\notin I}\{X_i=0\}$$

אז מתקיים

$$\{S_n = k\} = \bigcup_{I:|I|=k} A_I$$

וזה איחוד זר, ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) &= \sum_{I:|I|=k} A_I = \sum_{I:|I|=k} \prod_{i\in I} \{X_i = 1\} \prod_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus I} \{X_i = 0\} = \\ &= \sum_{I:|I|=k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

כשהמעברים נובעים מהאי־תלות, מהתפלגות ברנולי ומכמות תתי קבוצות בגודל k. ■

1.3 התפלגות גיאומטרית - $\mathrm{Geom}\left(p\right)$

התפלגות זו היא בעלת פרמטר $0 < p \leq 1$, והיא התפלגות μ על $\{1, 2, \dots\}$ שמוגדרת על ידי

$$\mu\left(k\right) = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

זו אכן התפלגות, כי

$$\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

וזאת בגלל הנוסחה לסכום של טור גיאומטרי (מכאן השם).

התפלגות זו עולה כאשר יש לנו סדרת ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות הצלחה p, שנעצרת בהצלחה הראשונה. אם X הוא כמות הניסויים עד ההצלחה הראשונה, אזי $X \sim \mathrm{Geom}\left(p\right)$.

הערה 1.1 כאן ניתן לממש את התיאור על מרחב ההסתברות

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 01, 001, \dots\} \\ \mathbb{P} &= \left\{p, p\left(1-p\right), p\left(1-p\right)^2, \dots\right\} \end{aligned}$$

1.4 התפלגות פואסון (Poisson) - $\mathrm{Poi}\left(\lambda\right)$

להתפלגות זו פרמטר $\lambda > 0$ ממשי. זו התפלגות μ על הקבוצה $\{0, 1, 2, \dots\}$ המוגדרת על ידי

$$\mu\left(k\right) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

זו אכן התפלגות שכן

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

ראינו כבר התפלגות זו: כאשר Π תמורה שנבחרת אחיד מבין כל התמורות על n איברים, וכאשר X הוא כמות נקודות השבת של Π (כלומר כמות האיברים i כך שמתקיים $\Pi(i) = i$).
לכל $k \geq 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-1} \frac{1}{k!}$$

וזו התפלגות פואסון עם $\lambda = 1$.
"עיקרון כללי": חוק המספרים הקטנים: כאשר יש לנו סדרת מאורעות, בלתי־תלויים או כמעט בלתי־תלויים, עם הסתברות קטנה לקרות, כך שבסך הכל מצפים שכמות קבועה λ תקרה, התפלגות כמות המאורעות שקורים בפועל מתכנסת להתפלגות $\mathrm{Poi}(\lambda)$ כאשר כמות המאורעות שואפת לאינסוף.

משפט 1.2 (התכנסות הפלגות בינומית להתפלגות פואסונית)
תהי $(p_n)_{n \geq 1}$ סדרת הסתברויות המקיימת $n \cdot p_n \to \lambda$ עבור $\lambda > 0$ ממשי. אזי ההתפלגות $\mathrm{Bin}(n, p_n)$ מתכנסת להתפלגות $\mathrm{Poi}(\lambda)$ כאשר n שואף לאינסוף, כלומר לכל $k \geq 0$ שלם וקבוע, מתקיים

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

דוגמא: לכל n, תהי $(X_i^n)_{i=1}^n$ סדרת משתנים מקריים בלתי־תלויים המקיימים $X_i^n \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{n}\right)$. אזי, לכל $k \geq 0$ שלם וקבוע,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_1^n + \ldots + X_n^n = k) \to e^{-1} \cdot \frac{1}{k!}$$

כאן $p_n = \frac{1}{n}$, ומתקיים $n \cdot p_n = 1 \to 1 = \lambda$, וכן $X_1^n + \ldots + X_n^n \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{1}{n}\right)$.