תרגול 4 הרצאה 8

מכפלה של תבניות דיפרנציאליות

מכפלה חיצונית

$\omega_1,\omega_2 \rightarrow \omega_1\wedge\omega_2$

1-תבנית   2-תבנית

$$\omega_1\wedge\omega_2(x,h_1,h_2)=\det\begin{pmatrix}\omega_1(x,h_1) & \omega_1(x,h_2)\\ \omega_2(x,h_1) & \omega_2(x,h_2)\end{pmatrix}$$

תכונות של $\wedge$:

- בילינארית מעל R
- אנטי סימטרית $-\omega_2\wedge\omega_1=\omega_1\wedge\omega_2$
- בילינארית מעל $C^0(R)$ $(f\omega_1)\wedge(g\omega_2)=(fg)(\omega_1\wedge\omega_2)$

גזירה חיצונית

ראינו מקודם - $d:\{0\text{-תבניות}\}\rightarrow\{1\text{-תבניות}\}$

$f \longrightarrow df$

תכונות -
- R לינארית
- כלל לייבניץ $d(fg)=f\,dg+g\,df$

משכללים $d:\{1\text{-תבניות}\}\rightarrow\{2\text{-תבניות}\}$

שתי הגדרות - (1 (הגדרה) עבור ω : 1-תבנית

$$d\omega(x,h,k)=(D_h\,\omega(\cdot,h))_x-(D_k\,\omega(\cdot,h))_x$$

(2 עבור $\omega=\sum_{i=1}^{n} f_i\,dx_i$

$$d\omega=\sum_{i=1}^{n} df_i\wedge dx_i=\sum_i\sum_j\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_i$$

תכונות -
- R - לינארית
- עבור $f\in C^2$ $d(df)=0$
- כלל לייבניץ $f\in C^1$, ω-תבנית $d(f\omega)=df\wedge\omega+f\,d\omega$

דוגמה ב$\mathbb{R}^2$

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{2}$$

$$d\omega = \frac{1}{2}\left(d(x\,dy) - d(y\,dx)\right) = \frac{1}{2}\left(dx\wedge dy - dy\wedge dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\,dx\wedge dy = dx\wedge dy$$

pull back — משיכה תבניות / תמונה הפוכה

תהי $T: U \to V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $\in C^1$ גזירה ברציפות

תהי α - k-תבנית על V. $T^*\alpha$ k-תבנית על U

$$T^*(\alpha)(x, h_1, \dots h_k) = \alpha(T(x), D_xT(h_1), \dots D_xT(h_k))$$

$$D_xT(h_1) \Leftrightarrow (D_{h_1}T)_x$$

הערה: עבור α - 0-תבנית (פונקציה סקלרית) מתקיים

$$T^*\alpha = \alpha\circ T$$

T^* לינארי מעל $\mathbb{R}$.

α - k-תבנית, f - 0-תבנית

$$T^*(f\cdot\alpha) = (T^*f)\cdot(T^*\alpha) = (f\circ T)\cdot(T^*\alpha)$$

α, β תבניות

$$T^*(\alpha\wedge\beta) = T^*\alpha\wedge T^*\beta$$

1) $dT^* = T^*d$ כלומר $d(T^*\alpha) = T^*(d\alpha)$

לכל α - k-תבנית

$$(T\circ S)^* = S^*T^*$$

דוגמה -

$$T: [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\omega = dx\wedge dy$$

הקורדינטות הפולריות של המישור

$$T^*\omega = T^*(dx)\wedge T^*(dy) = d(T^*x)\wedge d(T^*y)$$

$$T^*x = x\circ T = r\cos\theta \qquad T^*y = r\sin\theta$$

$$\boxed{= [\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta]\wedge[\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta]}$$

$$d(r\cos\theta) = \cos\theta\,dr + r\underbrace{d\cos\theta}_{-\sin\theta\,d\theta}$$

= תרגיל בית

$$\boxed{d(r\cos\theta) = \frac{\partial}{\partial r}(\ )dr + \frac{\partial}{\partial\theta}(\ )d\theta}$$ [illegible]

$= \text{מקדם} \cdot dr \wedge dr + \text{מקדם} \cdot d\theta \wedge d\theta + r\cos\theta \, dr\wedge d\theta - r\sin\theta \, d\theta \wedge dr =$

$= r\, dr \wedge d\theta$

[illegible]

יהי $\Gamma: B \to \mathbb{R}^n$ פרמטריזציה k־מימדית

יהי ω תבנית־k

$$\int_\Gamma \omega = \int_B \Gamma^* \omega$$

משפט סטוקס

ω - תבנית C^1.

C - פרמטריזציה k+1-מימדית

[illegible]

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

דוגמה [illegible]

חשב $\int_\Gamma w$

$\Gamma: [0, \pi/2] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

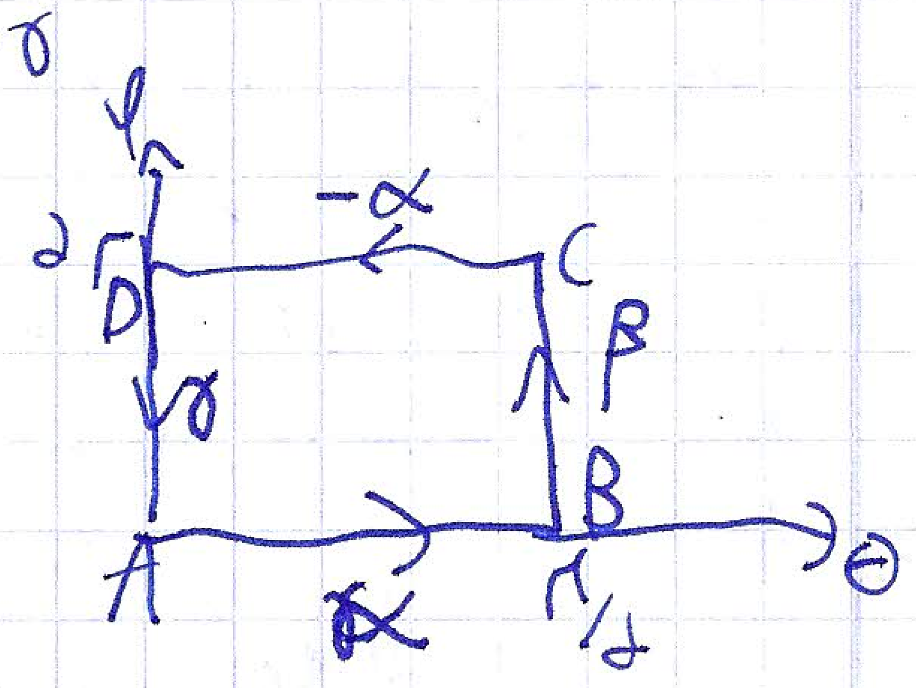
$\Gamma(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$w = dx \wedge dy$

[illegible]

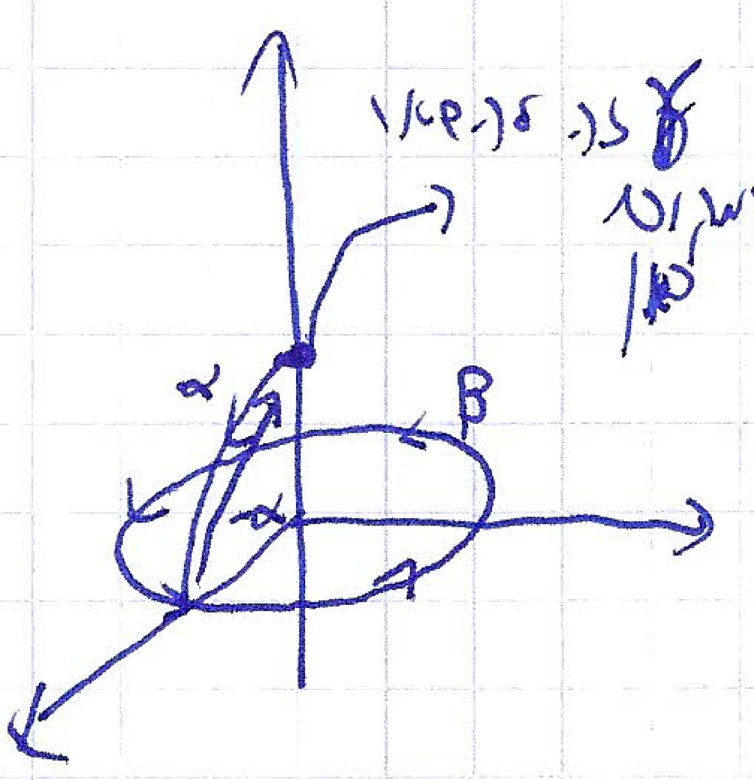
$w = d\lambda$

$\lambda = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$ פתרון



$\int_\Gamma w = \int_\Gamma d\lambda = \int_{\partial\Gamma} \lambda$

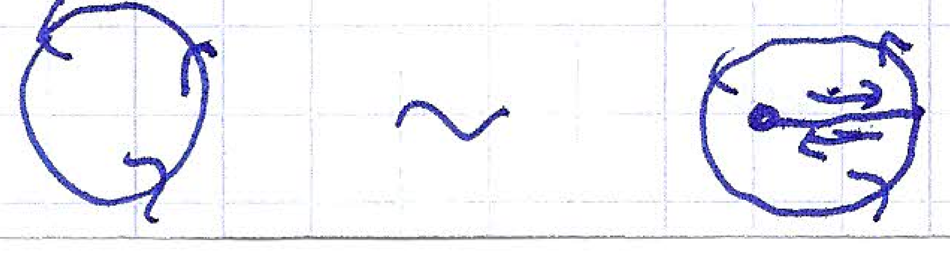
$\partial\Gamma = \underbrace{\Gamma|_{AB}}_{\alpha} + \underbrace{\Gamma|_{BC}}_{\beta} + \underbrace{\Gamma|_{CD}}_{-\alpha} + \underbrace{\Gamma|_{DA}}_{\gamma \sim 0}$



$\int_\Delta w = \int_\Delta dx \wedge dy = \int_B \Delta^*(dx \wedge dy) = \pi$

$\int_\Gamma w = \int_{\partial\Gamma} \lambda = \int_\beta \lambda$

בגלל הכל, נשאר רק $\int_\beta \lambda$ ע"י שוב סטוקס

 $\sim \int_\Delta d\lambda$

$\Delta: [0,1] \times [0, 2\pi] \to (r\cos\theta \;\; r\sin\theta)$