תרגול 4 הרצאה 5

תרגיל: f,g מוצגות גזירות

אזי fg מוצגת גזירה (משפט: f^2 גזירה)

$2f\cdot g=(f+g)^2-f^2-g^2$

תבניות דיפרנציאליות

1) תבנית לינארית -

E מ"ו ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$.

תבנית לינארית ממימד k (תבנית-k לינארית)

היא פונקציה $\omega:\underbrace{E\times E\dots\times E}_{k}\to\mathbb{R}$ כך ש

ω לינארית בכל משתנה

. ω אנטי סימטרית לחילופים של שני משתנים -

$$\omega(v_1,\dots v_i\cdot\alpha,\dots v_k)=\alpha\,\omega(v_1,v_2\dots,v_i,\dots v_k)$$

$$\omega(v_1,\dots v_i,\dots,v_j,\dots v_k)=-\omega(v_1,\dots v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$$

דוגמא - $\omega:\underbrace{\mathbb{R}^n\times\dots\times\mathbb{R}^n}_{n}\to\mathbb{R}$

$$\omega(v_1,\dots,v_n)=\det\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

היא n-תבנית.

תרגיל: תהא ω תבנית k לינארית ו- $v_1\dots v_k\in E$

ת"ל אזי $\omega(v_1,\dots v_k)=0$ (בגלל שניתן לכתוב אחד מהם כקומב' של האחרים, ולכן נקבל 0 מאנטיסימטריות.)

תרגיל: תהא σ - תמורה על k איברים

ונסמן $\sigma\in\Sigma_k$ ונסמן $\text{sign}(\sigma)$ סימן התמורה.

אזי לכל k תבנית ω מתקיים

$$\omega(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)}\dots,v_{\sigma(k)})=\text{sign}(\sigma)\,\omega(v_1,\dots v_k)$$

סימון - נסמן ב $\Lambda^k(E)$ את מרחב כל ה k תבניות

עבור $k=0$

$$\Lambda^0(E)=\mathbb{R}$$

$\Lambda^1(E)=E^*$ - המרחב הדואלי של E - המרחב הדואלי של הפונקציונלים הלינאריים על E

תזכורת - E מ"ו סוף מימדי מעל $\mathbb{R}$.

E^* - אוסף כל ההעתקות הליניאריות $\varphi: E \to \mathbb{R}$

$\dim E^* = \dim E$ - כי פונקציונל מוגדר ע"י ערכים על בסיס

ואם יש לנו $v_1, \dots, v_n$ בסיס של E קיים בסיס דואלי

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ של E^* כך ש $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$

לדוגמה עבור $\mathbb{R}^n$ עם $e_1, \dots, e_n$ הבסיס הסטנדרטי

$$\varphi_i(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_i$$

$\varphi_i = dx_i$ סימון ~~[illegible]~~

$\Lambda^k(E)$ עבור $\dim E = n$

$k > n$ $\quad \Lambda^k(E) =$

~~$k=$~~ n $\quad \dim \Lambda^{n}(E) = 1$

תזכורת $\omega \in \Lambda^n(E)$ אם $n = \dim E$

$\rho: E \to E$ ליניארית אז

$$\omega(\rho v_1, \dots, \rho v_n) = \det \rho \cdot \omega(v_1, \dots, v_n)$$

אמרנו $\dim \Lambda^n(E) = 1$ | תרגיל)

מכפלה חיצונית של תבניות

$\omega, \eta \in \Lambda^1(E)$

$$\omega \wedge \eta \in \Lambda^2(E)$$

wedge

$$\omega \wedge \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \omega(v_1) & \omega(v_2) \\ \eta(v_1) & \eta(v_2) \end{pmatrix}$$

מכפלה - $\omega \wedge \eta \in \Lambda^2(E)$

$\omega \wedge \eta$ בילינארית ב ω ו- η

$\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$

משפט - אם $n = \dim E$ ו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E^*$ - בסיס

אז $\{\alpha_i \wedge \alpha_j\}_{i<j}$ בסיס של $\Lambda^2(E)$

כאשר (α_i) בסיס דואלי של $v_1, \ldots, v_n$ של E

תבנית דיפרנציאלית

__הגדרה__ ω תבנית דיפרנציאלית C^k מסדר k

היא העתקה מסוג C^k

$(x, h_1, \ldots, h_k) \to \omega(x, h_1, \ldots, h_k)$

$\mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ פעמים}} \to \mathbb{R}$

כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$

ההעתקה $(h_1, \ldots, h_k) \to \omega(x, h_1, \ldots, h_k)$ היא k תבנית.

כאשר x קבוע נקבל תבנית רגילה (לפי הגדרה של מולטילינאריות אנטיסימטרית)

סימון נסמן $\omega_x(h_1, \ldots, h_k)$ תבנית k לינארית.

__דוגמאות__

תבנית-0 היא פונ' חלקה C^n

~~$\omega: \mathbb{R}^n \to$~~

$\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

תבנית-1 ל C^n

$(x, h) \to \omega(x, h)$

כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ $h \to \omega(x, h)$ לינארית

דוגמה אם $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונ' C^{r+1} אז

הדיפרנציאל של f הוא תבנית-1 מסדר C^r

$(df)(x, h) = Df_x(h) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$

- תרגיל 3 -

פונקציות הקואורדינטות

$x_1, \dots, x_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

וכן הבסיס $\{dx_j\}_{j=1}^n$

$dx_j(x,h) = h_j$

אינטגרל של תבנית - 1

ω תהי תבנית - 1 על $\mathbb{R}^n$

$\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ מסילה C^1 למקוטעין

נגדיר

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \omega(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt$$

אם $\omega = \sum f_i(x)\, dx_i$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

אז

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i f_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\, dt$$

<u>דוגמה</u> תרגיל (מסכם)

$\omega = x\,dy - y\,dx$

$\gamma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t) \quad t \in [0, \pi]$

$\gamma'(t) = \pi \cdot (-\sin \pi t, \cos \pi t)$

$\int_\gamma \omega = ?$

שימו לב - abusive notation

dx לא מוגדרת פה