חדו"א 4 תרגול שבוע 4

פוביני טונלי

<u>משפט</u> $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to[0,\infty)$ מדידה בורל, אי-שלילית

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^m} dy\, f(x,y)$$

<u>שימוש</u> פונקציית גאמא (9j)

<u>הגדרה</u> $B^n=\{x_1^2+\dots+x_n^2\le 1\}$ רוצים לחשב $V(B^n)=?$

הגדרה - $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt<\infty$$

לכל $s\in\mathbb{R}^+$ (תרגיל 2)

תכונות

Γ רציפה ב-$(0,\infty)$ - הוכחה - נניח $s_n\uparrow s_0$

מתכונות מונוטוניות: $\Gamma(s_n)=\int_0^\infty t^{s_n-1}e^{-t}\,dt\uparrow\int_0^\infty t^{s_0-1}e^{-t}\,dt=\Gamma(s_0)$

MCT
Monotone Convergence Theorem

למה?

$f_n(t)=t^{s_n-1}e^{-t}\uparrow f(t)=t^{s_0-1}e^{-t}$

נובע מתכונות של מונוטוניות.
(תכונות ~~[illegible]~~ החזקה האקספוננטית)

<u>[illegible]</u>

נניח $f_n,f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ו- $f_n\downarrow f$ נקודתית

אז $\int f_n\downarrow\int f$ בתנאי של רציפות מונוטונית

$\boxed{\text{אם אפשר?}\quad f_1-f_n\uparrow f_1-f}$

לכל $s>0$

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

הוכחה - אינטגרציה בחלקים

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^s\,dt=-\int_0^\infty(e^{-t})'t^s\,dt=\cancel{-e^{-t}t^s\Big|_0^\infty}+\int_0^\infty e^{-t}st^{s-1}\,dt=$$

$$=s\Gamma(s)$$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ $\qquad$ $\Gamma(1)=1$

2 ערכים חשובים

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt=\left[\begin{array}{c}t=x^2\\ dt=2x\,dx\end{array}\right]=\int_0^\infty 2e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

מסקנה: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\Gamma(n)=(n-1)!$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

נוסחת סטירלינג

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}\,s^{s-1/2}e^{-s}\cdot e^{\theta(s)}$$

$$\theta(s)\in(0,\tfrac{1}{12s})$$

למה קשור לגאוסיין למשתנה?

ה 0 זה אינטגרציה+

$$s\Gamma(s)=\Gamma(s+1)=\int_0^\infty t^s e^{-t}\,dt=\int_0^\infty e^{-t+s\log t}\,dt=[t=su]$$

$$=\int_0^\infty e^{-su+s\log u+s\log s}\cdot s\,du=s\cdot s^s\int_0^\infty e^{-sf(u)}du$$

$$\Gamma(s)=s^s\int_0^\infty e^{-sf(u)}du \qquad f(u)=u-\log u$$

נשים לב שלפונקציה יש פולט:

ל f יש מינימום יחיד ב $u=1$

$f(1)=1$

$f'(1)=0 \qquad f''(1)=1$

כאשר s גדול, רק הסביבה של המינימום תורמת לאינטגרל. היא נקודת מינימום

$f(u)\approx 1+\frac{1}{2}(u-1)^2$ טיילור $\cdot$ במינימום

טיילור סדר 2 ובגלל הקירוב

$$\int_0^\infty e^{-sf(u)}du\approx\int_0^\infty e^{-s-\frac{s}{2}(u-1)^2}$$

$$\approx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s}\cdot e^{-\frac{s}{2}(u-1)^2}du=e^{-s}\sqrt{\frac{2}{s}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r^2}dr\doteq e^{-s}\sqrt{2\pi}\,s^{-1/2}$$

$(-\infty,0)$ זניח בגבול

$r=\sqrt{\frac{s}{2}}(u-1)$

$$\Rightarrow\Gamma(s)\sim\sqrt{2\pi}\,e^{-s}s^{s-\frac{1}{2}} \qquad \boxed{\text{כאשר } s\to\infty}$$

<u>סימון</u> פונקציית B

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \qquad \alpha,\beta>0$$

טענה.

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

הוכחה.

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\,dt\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=$$

פוביני

(טונלי כי חיובי)

$$=\iint_{\substack{0<x<1\\0<t}}(tx)^{\alpha-1}[t(1-x)]^{\beta-1}e^{-t}\,t\,dt\,dx=$$

החלפת משתנים.

$$u=tx \qquad v=t(1-x)$$

$$t=u+v \quad\longleftrightarrow\quad x=\frac{u}{u+v}$$

$$\left\{(t,x)\;\middle|\;\begin{matrix}t>0\\0<x<1\end{matrix}\right\}\longleftrightarrow\left\{(u,v)\;\middle|\;\begin{matrix}u>0\\v>0\end{matrix}\right\}$$

לכן היעקוביאן:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,x)}=\begin{vmatrix}x & 1-x\\ t & -t\end{vmatrix}=-t \qquad |\text{ערך מוחלט}|$$

$$=\iint_{\substack{u>0\\v>0}}u^{\alpha-1}v^{\beta-1}e^{-u-v}\underset{\text{פוביני}}{=}\int_{u>0}u^{\alpha-1}e^{-u}\cdot\int_{v>0}v^{\beta-1}e^{-v}=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$$

כללי

$$V(B_p^n)=\int\!\!\int\!\!\cdots\!\!\int_{|x_1|^p+\dots+|x_n|^p\le 1}dx_1\,dx_2\dots dx_n$$

טענה

$$\int\!\!\int\!\!\cdots\!\!\int_{\substack{x_1,\dots,x_n>0\\x_1^{p_1}+\dots+x_n^{p_n}\le 1}}x_1^{r_1-1}\cdots x_n^{r_n-1}\,dx_1\dots dx_n=\frac{1}{p_1p_2\cdots p_n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{r_1}{p_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{r_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{r_1}{p_1}+\dots+\frac{r_n}{p_n}+1\right)}$$

מקבלים נפח של הכדור

$$r_1=\dots=r_n=1$$
$$p_1=\dots=p_n=2$$

שכן זה מקרה פרטי

$$p_1=p_2=\dots=p_n=1$$

שינוי משתנים:

$$y_i=x_i^{p_i}$$

$$x_i^{r_i-1}\,dx_i=\frac{1}{p_i}y_i^{\frac{r_i}{p_i}-1}\,dy_i$$

$$r_i\cdot\frac{d}{dx_i}\left(x_i^{r_i-1}\right) \qquad r_i\cdot\frac{d}{dy_i}\left(y_i^{\frac{r_i}{p_i}}\right)$$

עם הצבה נקבל:

$$\int\int\cdots\int_{\substack{x_1^{p_1}+\dots+x_n^{p_n}\le 1\\ x_1,\dots,x_n\ge 0}} x_1^{r_1-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n-1}\,dx_1\ldots dx_n = \frac{1}{p_1\cdot\ldots\cdot p_n}\int\cdots\int_{\substack{y_1+\dots+y_n\le 1\\ y_i\ge 0}} y_1^{\frac{r_1}{p_1}-1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\frac{r_n}{p_n}-1}$$

עבור $p_i=1$ נקבל את אינטגרל הסימפלקס

נוכיח את הטענה הבאה.

נוכיח עכשיו את הטענה

$$I_n=\int\cdots\int_{\substack{x_1+\dots+x_n\le 1\\ x_1,\dots,x_n\ge 0}} x_1^{r_1-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n-1}\,dx_1\ldots dx_n=\frac{\Gamma(r_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(r_n)}{\Gamma(r_1+r_2+\dots+r_n+1)}$$

הוכחה - באינדוקציה

אם $n=1$

$$I_1=\int_0^1 x^{r-1}\,dx=\frac{1}{r}=\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r+1)}$$

$$I_n=\int_0^1 dx_n\, x_n^{r_n-1}\cdot\underbrace{\int\int\cdots\int_{\substack{x_1,\dots,x_{n-1}\ge 0\\ x_1+\dots+x_{n-1}\le 1-x_n}} x_1^{r_1-1}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{r_{n-1}-1}\,dx_1\ldots dx_n}_{J}$$

נחשב את J

$$\forall 1\le i\le n-1\quad y_i=\frac{x_i}{1-x_n}$$

$$\frac{dx}{dy}=(1-x_n)^{n-1}\Leftarrow\frac{dx_i}{dy_i}=(1-x_n)$$

משתנים

$$J=(1-x_n)^{r_1+\dots+r_{n-1}-(n-1)+(n-1)}\underbrace{\int\cdots\int_{\substack{y_1+\dots+y_n\le 1\\ y_1,\dots,y_n\ge 0}} y_1^{r_1-1}\cdot\ldots\cdot y_n^{r_{n-1}-1}\,dy}_{I_{n-1}}$$

$$I_n=I_{n-1}\underbrace{\int_0^1 x_n^{r_n-1}(1-x_n)^{r_1+r_2+\dots+r_{n-1}}}_{B(r_n,\ r_1+r_2+\dots+r_{n-1}+1)}dx_n$$

$$I_n=\frac{\Gamma(r_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(r_{n-1})}{\Gamma(r_1+\dots+r_{n-1}+1)}\cdot\frac{\Gamma(r_n)\cdot\Gamma(r_1+\dots+r_{n-1}+1)}{\Gamma(r_1+r_2+\dots+r_n+1)}=\frac{\Gamma(r_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(r_n)}{\Gamma(r_1+\dots+r_n+1)}$$

מסקנה

$$V(B_p^n)=\frac{2^n\left(\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n}{p^n\,\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$$

בפרט

$$V(B_2^n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$