

notes 2
9

3 elements 4 1/3 1
L^p

$$\tilde{L}^p(U) = \left\{ f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_U |f|^p < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left[\int_U |f|^p \right]^{1/p}$$

$1 \leq p < \infty$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in \tilde{L}^p(U)$

$f, g \in \tilde{L}^2(U)$ $\int_U fg \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$

$$\int_U fg \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

$$\langle f, g \rangle = \int_U fg$$

$f, g \in \tilde{L}^1(U)$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(Hölder)

$f \in \tilde{L}^p(U)$ $g \in \tilde{L}^q(U)$

$$\|fg\|_1 = \int_U |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(Hölder conjugate)

$$(p-1)(q-1)=1$$

$\tilde{L}^p$

$0 < \lambda < 1$ $u, v \in \tilde{L}^1(U)$ Hölder

$$\|u^\lambda v^{1-\lambda}\|_1 \leq \|u\|_1^\lambda \|v\|_1^{1-\lambda}$$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$u = f^p$ $v = g^q$ $\lambda = \frac{1}{p}$ $1-\lambda = \frac{1}{q}$

$$\sum \lambda_j = 1 \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \quad x_1, \dots, x_n \geq 0$$

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

משפט הנורמה המשוקעת

משפט הנורמה המשוקעת

$$v = \lambda u + (1-\lambda)v \quad \lambda \in [0,1]$$

$$\lambda \in [0,1]$$

$$\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$$

משפט הנורמה המשוקעת

$$\|u^{\lambda} v^{1-\lambda}\|_1 \leq 1$$

$$|u^{\lambda} v^{1-\lambda}| \leq \lambda |u| + (1-\lambda) |v|$$

משפט הנורמה המשוקעת

$$\|u^{\lambda} v^{1-\lambda}\|_1 \leq \lambda \|u\|_1 + (1-\lambda) \|v\|_1 = \lambda + 1 - \lambda = 1$$

$$f, g \in \tilde{L}^p(\mu)$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$$\Delta \quad \tilde{L}^p(\mu)$$

$$(\tilde{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$$

$$f, g \in \tilde{L}^p(\mu)$$

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^{p-1} \|f\|_p + \|g\|_p^{p-1} \|g\|_p$$

$$\int (f+g)^p$$

$$q(p-1) = (p-1)(q-1) + p-1 = p$$

$$\int (f+g)^p < \infty$$

$$(f+g)^{p-1} \in \tilde{L}^q(\mu)$$

$$\int |f+g|^p \leq \|f\|_p \|f+g\|_q^{p-1} = \|f\|_p \left[\int |f+g|^p \right]^{1/q}$$

$$\int |f+g|^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p \cdot \left[\int |f+g|^p \right]^{1/q}$$

$$\|f\|_p + \|g\|_p \geq \left[\int |f+g|^p \right]^{1-\frac{1}{q}} = \|f+g\|_p$$

מכאן נובע כי $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

נניח $u, v \in \mathbb{R}^n$

הפונקציה $\psi: u \rightarrow v$

הפונקציה $f: V \rightarrow \mathbb{R}$

הפונקציה $f: V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_V f = \int_U (f \circ \psi) |\det D\psi|$$

(g, g)

הפונקציה

$m=1$ נניח $x \in \mathbb{R}^3$ ונניח $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$F_\theta(x) = -\frac{\mu \cdot x - \xi}{|x - \xi|^3}$$

$$u(x) = \frac{\mu}{|x - \xi|} \quad F_\theta(x) = \nabla u(x)$$

נניח $\mu_1, \dots, \mu_N$ ונניח $\xi_1, \dots, \xi_N$

$$u(x) = \sum_i \frac{\mu_i}{|x - \xi_i|}$$

נניח $\mu \equiv 1$ ונניח $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$u = \int_{\Omega} \frac{\mu(\xi)}{|x - \xi|}$$

נניח $\mu \equiv 1$ ונניח $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{x - \xi}$$

נניח $|x| = |y| \rightarrow u(x) = u(y)$

נניח $\mu \equiv 1$ ונניח $\Omega = \mathbb{R}^n$

$x = (0, 0, z)$ $z \geq 0$
 (r, θ, φ)
 $|x - \xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_3 - z)^2 = r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - z)^2$

$$u(x) = \iiint_{\substack{0 < r < R \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 < \varphi < 2\pi}} \frac{r^2 \sin \theta}{|x - \xi|} dr d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^R dr \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2rz \cos \theta + r^2}} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{r}{z} \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \sqrt{z^2 - 2rz \cos \theta + r^2} d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{r}{z} \left[\sqrt{z^2 + r^2 - 2rz \cos \theta} \right]_0^\pi dr = 2\pi \int_0^R \frac{r}{z} (\sqrt{z^2 + r^2} - \sqrt{z^2 - r^2}) dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{r}{z} \underbrace{(\sqrt{z^2 + r^2} - \sqrt{z^2 - r^2})}_{2 \min(z, r)} dr$$

$r = \min(r, z)$ $z \geq R$
 $x \notin B_R$

$$u(x) = 4\pi \int_0^R \frac{r^2}{z} dr = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{z}$$

$$u(x) = 4\pi \left[\int_0^z + \int_z^R \right] = \frac{2\pi}{3} (3R^2 - z^2)$$

$z < R$
 $x \in B_R$
 $z > R$
 $x \notin B_R$