תכונות ב חדוא שיעור 2

מרצה בגבולות

כרמל

ספר קריאה

daniel r6

תרגיל ~~ח~~ ב-1

תרגולים מגיש דמ"ל

moodle + אתר של הקורס

ציון סופי בגבול מגן ... בחן בונוס

אינטגרל לפי אשנוירה

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מדידה לפי ז'ורדן אם

$$E = \{(x,t) \mid -\infty < t < f\}$$

(ז"א) מדידה לבג מקומית

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = V_*\{(x,t) \mid 0 < t < f(x)\} - V_*\left(\{(x,t) \mid f(x) < t < 0\}\right)$$

(אם אין "$\infty - \infty$")

אם $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מדידה לבג ומקומית $f \geq 0$ אז

$$\int f = V_*\left(\{(x,t) \mid 0 < t < f(x)\}\right) \in [0,\infty]$$

אחרת $f = f^+ - f^-$ $\quad f^+, f^- \geq 0$

$f^+ = \max(f,0)$ $\quad f^- = \max(0,-f)$

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

כלל $\infty - a = \infty$ $\quad -\infty + a = -\infty$

אבל משמעות "$\infty - \infty$"

משפט $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה $\Leftarrow$ f מדידה ז'ורדן

הוכחה f רציפה $\Rightarrow$ אז $E = \{(x,t) \mid f(x) > t\}$

$$\partial E = \{(x,t) \mid f(x) = t\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \Gamma(f)$$

מדידת הגרף לפי הכלל מהגרף מספיק להראות

$V_*(\partial E) = 0$ כלומר ∂E היא מנומה 0 (מקומית)

$B(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ כדור סגור ב־ ~~r~~ מרכזו 0 כלומר $B(r)=B(0,r)$

$$A_r = \partial E \cap (B_r \times \mathbb{R}) = \{(x, f(x)) \mid x \in B(r)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

אזי $A_r \subseteq \partial E$ מכילות בגרף מקומי ב־ ∂E

וכן $A_r \nearrow \partial E$ ולכן (מכאן התכונות מונוטוניות של מידה)

$$V_*(\partial E) = \lim_{r\to\infty} V_*(A_r)$$

צ"ל לכל $r>0$ $V_*(A_r)=0$ ראינו זה

באינטגרביליות כי f אינטגרבילית על $B(r)$ כי רציפה וחסומה.

<u>תרגיל</u> אם $f \geq 0$ $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מדידה

$$\int_{A_k} f \to \int_{\mathbb{R}^n} f$$ לכל ~~[illegible]~~ מדידות $A_k \nearrow \mathbb{R}^n$

מוכיחים כמו משפט ההתכנסות המונוטונית.

דוגמא - חשב

~~נותן~~ $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

פתרון - ~~0~~ הפונקציה רציפה אי-שלילית, לכן מדידה.

ניקח $A_k = \{x^2+y^2 \le k^2\}$

$$\iint_{A_k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \underset{\text{פוביני}}{=} \iint_{A_k} e^{-r^2}\cdot r \underset{\text{פולריות}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^k e^{-r^2} r\,dr\,d\theta =$$

$$= \pi \cdot \int_0^k e^{-r^2} 2r\,dr = \pi\left(-e^{-r^2}\right)\Big|_0^k \quad \text{על } A_k \quad = \pi \cdot -(-1) = \pi$$

ניקח $B_k = [-k,k]^2$

$$\iint_{B_k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-k}^{k} e^{-x^2}dx \int_{-k}^{k} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-k}^{k} e^{-t^2}\,dt\right)^2$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\right)^2 = \lim_{k\to\infty}\left(\int_{-k}^{k} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \lim_{k\to\infty}\iint_{B_k} e^{-x^2-y^2} \overset{\text{ולכן}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$ ידוע לנו

<u>נשים לב</u> שלמשל הגדרה של האינטגרל ב- $\mathbb{R}^n$, אין חשיבות
של סדר, כי אין משמעות לאינטגרלים איטרטיביים
ולכן הגדרנו. [כי דיון המקרה של $\int f_+ \overset{"}{=} \int f_- = \infty$.

נגדיר f ב- $\mathbb{R}^n$ את $A>0$ ~~[illegible]~~ מטריצה סימטרית
חיובית $n\times n$ אז

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax\rangle}\,dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}$$

<u>הוכחה</u>

עבור $n=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

בעזרת החלפת משתנה של הנוסחה $\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$

עבור A נניח כי A מטריצה אלכסונית –

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

$$I = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_j x_j^2}\,dx_j = \prod \sqrt{\frac{\pi}{a_j}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{a_j}}$$

ע״י משפט פוביני
אחרת נלכסן כמו קודם

עבור A כללית – היא סימטרית ~~[illegible]~~ לכן ~~[illegible]~~ ניתן ללכסון
ע״י אורתוגונלית/אוניטרית (שינוי משתנה עם $|\det| = 1$)
לכן מנוסחת החלפת משתנים ~~[illegible]~~ המקרה הכללי
נובע מהמקרה הנ״ל.

(נסמן $Q^{-1}AQ = D$ אלכסונית ו- $|\det Q| = 1$)

$$\int e^{-\langle y, Dy\rangle}\,dy\,|\det Q| \overset{\vec{y} = Q\vec{x}}{=} \int e^{-\langle Q^{-1}x, AQx\rangle}|Q| = \int e^{-\langle x, Ax\rangle}\,dx$$

דוגמה

$x\neq 0 \qquad f(x)=\frac{1}{|x|^{\alpha}}$

א) מתי f אינט' על $U=\{0<|x|\le 1\}$?

ב) מתי אינטגרבילית על $V=\{|x|>1\}$

פתרון.

א) $U=\bigcup C_k$

$C_k=\left\{x \mid \frac{1}{2^k}<|x|\le\frac{1}{2^{k-1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ (זרות)

צריך לחשב $\int_{C_k} f$ $\quad \left[\int_U f=\sum\int_{C_k} f \right.$ אזי$\left.\right]$

ב C_k: $\quad 2^{\alpha(k-1)}\le f\le 2^{\alpha k}$.

כמו כן $C_k=2\cdot 2^{-k}C_1$

$V(C_k)=2^{-n(k-1)}\cdot C \qquad C=V(C_1)$

מכאן

$$\frac{C}{2^{\alpha}}2^{(\alpha-n)k}\le\int_{C_k}f\le 2^{\alpha k}\cdot C2^{-nk}=C\cdot 2^{(\alpha-n)k}$$

וכעת $\bigcup_{k=1}^{N} C_k \nearrow U$

לכן

$$\sum^{N}\int_{C_k}f\to\int_U f$$

צריך רק לבדוק עבור אילו ערכי α נקבל ~~...~~ $\sum_{k=1}^{\infty}2^{(\alpha-n)k}$ מתכנס

כלומר $\infty>\sum_{k=1}^{\infty}2^{(\alpha-n)k} \iff \int_U f<\infty$

$\Updownarrow$

$\alpha<n$

ב) באופן דומה, נעבוד עם טבעות

$B_k=\{2^k\le|x|<2^{k+1}\}$

ונקבל כי $\int_V f$ מתכנס אמ"מ $\alpha>n$

ומכאן $\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f$ לא מתכנס לאף α.