תרגול 4 הרצאה 15 (השלמה)

סימון $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ היא יריעה n מימדית.

<u>אוריינטציה</u>
<u>ואינטגרציה</u>

יהי $x \in M$ המרחב המשיק T_xM

שתי הגדרות - (שקולות)

1) אם (G,ψ) מפה סביב x $G(0)=x$

$$T_xM = Image(D_0\psi) \qquad D_0\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$$

2) אם (ψ,φ) קו-מפה של x אז

$$T_xM = \ker(D_x\varphi) \qquad D_x\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$$

בכל מקרה $T_xM = n$.

• k תבנית על $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$ היא העתקה חלקה:

$$\omega : \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N)^k \to \mathbb{R}$$

$x \in M$, $h_1,\dots,h_k \in T_xM$

כך ש $\omega(x,\cdot,\dots,\cdot)$ היא תבנית k-לינארית אנטי-סימטרית על T_xM.

<u>הגדרה</u> <u>אוריינטציה</u> של $M^n \subseteq \mathbb{R}^N$

עבור $x \in M$ נאמר כי

אוריינטציה רגילה: (G_1,ψ_1), (G_2,ψ_2) 2 מפות של M סביב x.

הן שקולות אם $D_0(\underbrace{\psi_2^{-1}\circ\psi_1}) > 0$ יש שתי מחלקות שקילות.

זכרנו כי מעבר הוא דיפאו
שבה מוגדר C^n. ממש דיפרנציאבילי
לא 0

הן נקראות האוריינטציות של M ב x

אוריינטציה של M היא בחירה רציפה של אוריינטציות.

$$\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x\}_{x\in M} \quad (\mathcal{O}_x \text{ אוריינטציה ב } x \text{ "רציפה" ב } x)$$

M אוריינטבילית אם יש לה אוריינטציה.

<u>דוגמאות</u> $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ אוריינטבילית.

טבעת מוביוס לא אוריינטבילית.

<u>תבנית נפח</u> על יריעה אוריינטבילית $(M,\mathcal{O})$

היא n- תבנית <u>המצב</u> ν על M כך ש

1) אם $e_1,\dots,e_n$ בסיס אורתונורמלי של T_xM אז $|\nu(x,e_1,\dots,e_n)|=1$

~~אם מתאימה לאוריינטציה~~

② וכן μ מתאימה לאוריינטציה: לכל מפה $(G,\psi)\in\Theta_x$ מתקיים

$$\mu(x,(D_1\psi)_0,\dots,(D_n\psi)_0) > 0$$

טענה: אם (G,ψ) מפה תואמת של M,

לכל $x\in\psi(G)$ $(G,\psi)\in\Theta_x$

$$\psi^*\mu = J_\psi\, du_1\wedge\dots\wedge du_n$$

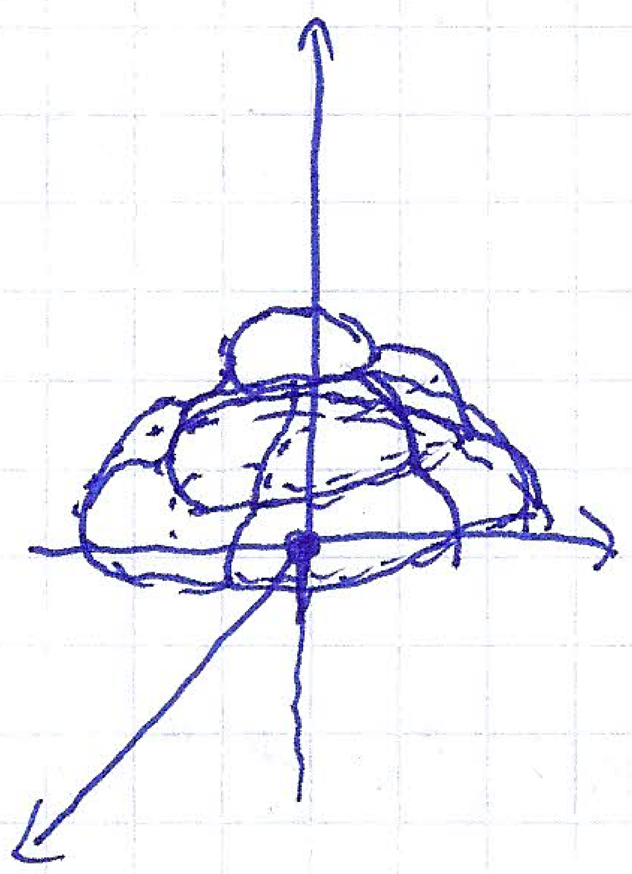
$$J_\psi(u) = \sqrt{\det\left(\langle (D_i\psi)_u,(D_j\psi)_u\rangle\right)}$$

דוגמה: משטח סיבוב:

$M\subseteq\mathbb{R}^3$

$\gamma(s) = (f(s), g(s))$

$s\in[a,b]$



$$\psi(s,t) = (f(s)\cos t,\ f(s)\sin t,\ g(s))$$

נסמן $M = Image(\psi)$. זו יריעה דו-ממדית ב-$\mathbb{R}^3$.

עם אוריינטציה

דוגמה: של משטח סיבוב -

נחשב μ תבנית הנפח של המשטח

$$\psi^*\mu = J_\mu\, ds\wedge dt$$

$\psi_s = (f'\cos t, f'\sin t, g'(s))$

נגזרת לפי s $\quad \psi_t = (-f(s)\sin t, f(s)\cos t, 0)$

$\|\psi_s\|^2 = f'^2 + g'^2$

לכן $\quad \|\psi_t\|^2 = f^2$

$\langle \psi_s \cdot \psi_t\rangle = 0$

$$J_\psi^2 = \det\begin{vmatrix} f'^2+g'^2 & 0 \\ 0 & f^2\end{vmatrix} = f^2(f'^2+g'^2)$$

$$\mu = (\psi^{-1})^*(J_\psi(ds\wedge dt)) = (\psi^{-1})^*\left[f\cdot\sqrt{f'^2+g'^2}\, ds\wedge dt\right]$$

הגדרה - תהי $M^n\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה עם אוריינטציה.

(ψ,G) מפה תואמת.

אם ω - n תבנית רציפה ונתמכת בקומפקט $K\subseteq\psi(G)$

נגדיר $\quad \psi^*\omega = f\cdot du_1\wedge\dots\wedge du_n$

$$\int_{(M,\Theta)}\omega := \int_G f$$

בפרט $\quad Vol(\psi(G)) = \int_{M,\Theta}\mu$

<u>מסקנה</u> נפח גוף סיבוב

$$Vol(M) = \int_{(a \times b) \times [0,2\pi)} J\psi \, ds \wedge dt = \int_0^{2\pi} dt \int_a^b ds \, f\sqrt{f'^2 + g'^2} =$$

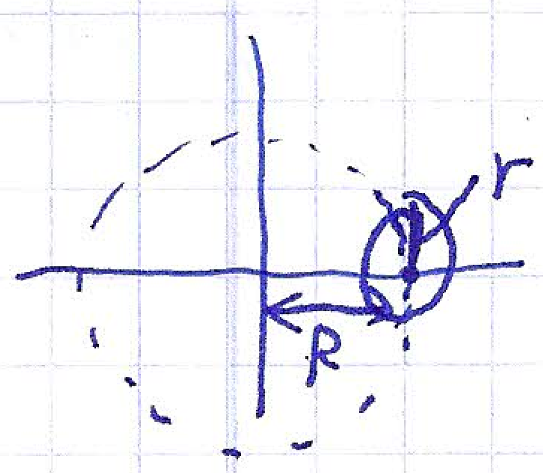
$$= 2\pi \int_a^b f(s)\sqrt{f'^2(s) + g'^2(t)}$$

דוגמא - טורוס -

לפי הנוסחה עבור טורוס

מעגל רדיוס

$F(s) = R + r\cos(s)$ $\qquad g(s) = r\sin s$



$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r\cos(s)) \cdot r \, ds = (2\pi r)(2\pi R)$$