תת יריעות ~~[illegible]~~ שיעור 14

<u>יריעות</u>

$M \subseteq \mathbb{R}^N$ תת קבוצה לא ריקה. $x_0 \in M$.

מפה n מימדית של M סביב x_0 היא זוג (G, ψ).

כאשר G סביבה פתוחה של 0 ב $\mathbb{R}^n$.

$C^1 \ni \psi: G \to M$ (במובן הפרמטרי $\psi: G \to \mathbb{R}^N$) $\psi(0) = x_0$.

$\psi(G) \subseteq M$ היא קבוצה פתוחה יחסית, ו- ψ הומיאומורפיזם בין G ל $\psi(G)$

כמו כן הדרגה של $(D_\psi)_x$ מלאה לכל $x \in G$

$\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^N$ נקראת יריעה n מימדית אם לכל $x_0 \in M$ יש מפה n מימדית סביבו של M.

<u>דוגמה</u>

$\psi(u) = (u, f(u))$ $\qquad C^1 \ni f: G \to \mathbb{R}^{N-n}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$

זו מפה כי: $M = \{(u, f(u)) \mid u \in G\}$

סביב $x_0 = \psi(0)$.

$D_u \psi = \begin{pmatrix} \underbrace{I}_{id_{n\times n}} & \underbrace{D_u f}_{n\times(N-n)} \end{pmatrix}$ מלאה לכל u.

"כל מפה היא גרף"

נניח ש $\psi: G \to M$ מפה סביב x_0

"טענה" קיים $W \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוח ו- $\phi: W \to G'$

ϕ דיפאומורפיזם $G' \subseteq G$ כך ש

$(\psi \circ \phi)(u) = (u, f(u))$

* כל עוד נדייק על שהגדרה, נניח שיש [illegible] עד כדי שינוי סדר הקואורדינטות [illegible]

נרשום: $\psi(u) = (\underset{\mathbb{R}^n}{A(u)}, \underset{\mathbb{R}^{N-n}}{B(u)})$ $\qquad D_u\psi = (D_uA, D_uB)$

ידוע ש יש מינור n מימדי של $D_u\psi$ שאינו מתאפס, בה"כ D_uA הפיך ב-0.

נניח $x_0 = (\underset{\mathbb{R}^n}{0}, \underset{\mathbb{R}^{N-n}}{b})$ (אם לא היה הפיך ב-0, הופכיות הייתה נשמרת ב $G' \subseteq G$ בסביבה) (כל זה לא חובה *)

משפט הפונקציה ההפוכה - יש סביבה $0 \in W$ כך ש

$A^{-1}: W \to G'$ מוגדרת ו- C^1. נגדיר $f = B \circ A^{-1}$ $\quad \phi = A^{-1}$

סוף

$(\psi \circ \phi)(u) = (A(\phi(u)), B(\phi(u))) =$

$= (u, f(u))$

תרגיל (משפט ~~[illegible]~~ פרמטר' מודר"

נניח כי $x_0 \in M \subseteq \mathbb{R}^N$

$(G_1, \psi_1), (G_2, \psi_2)$

שתי פרמ' n מימדיות של M סביב x_0.

הוכח: קיים תחום C^1 $\varphi : G_1' \to G_2'$ כך ש $\psi_2(\varphi(u)) = \psi_1(u)$

עבור $G_i' \subseteq G_i$ פתוחות

ו- $\det(D_0\varphi) \neq 0$

פתרון נניח בה"כ כי $\psi_1(G_1) = \psi_2(G_2)$ אחרת נצמצם, כדי
הומיאומורפיזם

נגדיר $\varphi : G_1 \to G_2$

$\varphi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ הומיאומורפיזם כהרכבה

~~φ גזירה כהרכבה של גזירות, לפי כלל השרשרת~~

$\cancel{D_0\varphi = (D_{x_0}\psi_2)^{-1} \cdot (D_0\psi_1)}$ $\cancel{\det D_0\varphi \neq \frac{\det D_0\psi_1}{\det D_0\psi_2}}$

$\cancel{(\det D_0\varphi)^2 = \det}$

~~כי ...~~

נראה שבפרט כי φ גזיר C^1 נניח בה"כ כי ψ_2 גרף

נזכור: קיימת פונק' ש $f \in C^1(G_2 \to \mathbb{R}^{N-n})$

ו- $\psi_2(v) = (v, f(v))$

$\psi_2^{-1}(v, u) = v$

$v \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{N-n}$

זה לא מספיק

אבל $\psi_1(u) = (A(u), B(u))$

נקבל $\varphi = (\psi_2^{-1} \circ \psi_1) = A$ גזירה C^1.

באופן כללי מה גורל הקיצוני?

$W \xrightarrow{\phi} G_2 \xrightarrow{\psi} M$

כעת $\psi_2 \circ \phi$ ... קל לראות ש φ היא C^1
מכלל השרשרת

נשתמש בכלל השרשרת: $D\psi_1 = D\psi_2 \circ D\varphi$

ולכן דרגה של $D_0\varphi$ הפיכה.

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ דוגמא - הספרה ~~[illegible]~~ n מימדית.

טענה: S^n יריעה n מימדית

<u>הגדרה</u> co-chart - משוואות זה מה מגדיר תת מימדית k ב $\mathbb{R}^N$.

רעיון: לא מעבירים פרמטרים, מגדיר את $\mathbb{R}^k$, פשוט כמו מעל.

אלא אומרים של תנאים מה $\mathbb{R}^{N-k}$ ב $\mathbb{R}^N$, כלומר ~~[illegible]~~ קו-ממד.

תהי $M \subseteq \mathbb{R}^N$ קו-ממד הינו U, φ כך ש $U \subseteq \mathbb{R}^N$ פתוחה $x_0 \in U$.

$$\exists \varphi: U \to \mathbb{R}^{N-n} \quad C^1 \qquad \varphi(x_0) = 0 \qquad M \cap U = \{x : \varphi(x) = 0\}$$

לכל $x \in U$ $D_x\varphi$ הינו על $\mathbb{R}^{N-n}$.

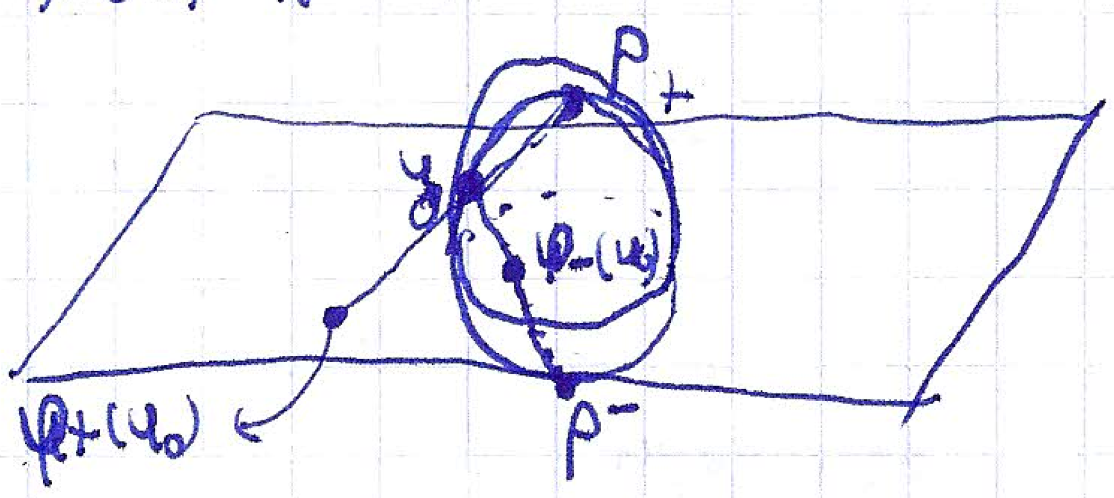
הוכחת הטענה עבור $\mathbb{R}^n$

ניקח $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ $\quad \varphi: U \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = \|x\|^2 - 1$

אזי לכל $x \in U$ $\quad \nabla u\big|_{\vec{x}} = 2\vec{x}$

בפרט לכל $x \in S^n$ $D_x\varphi \neq 0$ הינו <u>על</u> $\mathbb{R}$. ו-(U, φ) קו-מפה עבור הספירה.

מפות של S^n - הטלה סטריאוגרפית:



$\mathbb{R}^n \times \{0\}$

$P_\pm = (0, \dots, 0, \pm 1)$

$U_\pm = S^n \setminus \{P_\pm\}$

$\varphi_\pm \quad U_\pm \to \mathbb{R}^n$ מוגדרות בציור

תרגיל: רשמו נוסחה עבור $\varphi_\pm$.

שאלה מעשית - כמה נחוץ לפחות מפות את כל הספירה?