תרגול 4 הרצאה 8.7

~~[illegible]~~

סטוקס רגולרי משפט סטוקס 2 מימדי על B

נראה

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} dw \stackrel{?}{=} \int_{\partial[0,1]^2} w$$

כאשר

$$w = f_1 du_1 + f_2 du_2$$

ברור שמספיק עבור

$$w = f du_1 = f(u_1,u_2)\,du_1$$

$$dw = df\wedge du_1 = \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2\wedge du_1 = -\frac{\partial f}{\partial u_2} du_1\wedge du_2$$

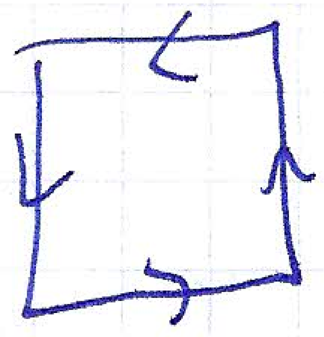
$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2$$

$$\int_B dw = -\int\left(\frac{\partial f}{\partial u_2} du_1\right) du_2 = -\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} =$$

$$= \int_0^1 \left(-f(u_1,1) + f(u_1,0)\right) du_1$$

NL לפי u_2

$$\int_{\partial([0,1]^2)} w = \int_0^1 f(u_1,0)\,du_1 - \int_0^1 f(u_1,1)\,du_1$$



האורך על הקווים האנכיים מתאפס

כי

$$du_1\left(D\binom{0}{f(u)}\right) = 0$$

כי ה-קואורדינטה הראשונה היא קבועה.

ולכן קיבלנו שאכן שוויון!

$$\int_B dw = \int_{\partial B} w$$

[תבניות דיפרנציאליות נשמרות תחת דיפאומורפיזם]

מסקנה

$$\partial c_1 \sim \partial c_2 \Leftarrow c_1 \sim c_2$$

(כי סטוקס + לכל מגבלה C_0 זה מגבלה C_1)

$$\int_{\partial c_1} w = \int_{c_1} dw = \int_{c_2} dw = \int_{\partial c_2} w$$

הפונקציה המסלול. $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$ (היא רציפה (במובן התכנסות ליפשיץ))

לכל ω שהיא תבנית ב-$\mathbb{R}^n$ ו-C^0

לפעמים רק מכיוון נכון.

אם $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \in C^1([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n)$ וגם $\gamma_k \to \gamma$ במ"ש (נקודות של התכנסות C^0)

וגם $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ "חסומה ב-C^1" כלומר חסומה במידה אחידה.

הנגזרות חסומות במידה אחידה.

(תנאים אלה שקולים להתכנסות ליפשיץ שראינו בתחילת הקורס)

אזי $\int_{\gamma_k} \omega \to \int_\gamma \omega$ לכל תבנית ω ב-$\mathbb{R}^n$

דרך 1 אפשר להניח $\gamma, \gamma_k \in C^1$ בלי C^1 במקוטעין,

לא דרך 1 פירוט לסוף

דרך 2 מספיק להניח $\omega \in C^1$ ← (לא דרך) דוגמה, למה - (סטוקס/גרין)

הערה צריך את החסימות ב-C^1, למשל $n=2$

$\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_k(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}(\cos kt, \sin kt)$

$\gamma(t) = (0,0)$

$\gamma_k \xrightarrow{u} \gamma$

$\omega = x\,dy - y\,dx$

$$\int_{\gamma_k} \omega = \int_0^{2\pi} \omega\left(\tfrac{1}{\sqrt{k}}(\gamma_k(t)), \sqrt{k}\cdot(-\sin kt, \cos kt)\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos kt \sqrt{k} \cos kt - \frac{1}{\sqrt{k}} \sin kt \cdot (-\sqrt{k} \sin kt) = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi$$

$\int_\gamma \omega = 0$ בעוד ש:

מה הבעיה? γ_k' לא חסומה.

הוכחה - למה מספיק $\omega \in C^1$?

נסמן $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_i$ נניח $\sum_{i=1}^{n} f_{ij} \, dx_i = w_j$ כאשר $f_{ij} \xrightarrow{u} f_i$

$$\left| \int_{\gamma_k} \omega - \int_{\gamma} \omega \right| \le \underbrace{\left| \int_{\gamma_k} \omega - \int_{\gamma_k} w_j \right|}_{} + \underbrace{\left| \int_{\gamma_k} w_j - \int_{\gamma} w_j \right|}_{} + \underbrace{\left| \int_{\gamma} w_j - \int_{\gamma} \omega \right|}_{}$$

מתכנס ל-0 במ״ש על k (כי γ_k מוכלת ב-C^1) — $\downarrow \frac{\varepsilon}{3}$

שלב 1 — $\downarrow \frac{\varepsilon}{3}$

מתכנס ל-0 — $\downarrow \frac{\varepsilon}{3}$

למה זה מתכנס w_j (עבור j) ו-k ?

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)) - \sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma_k(t), \gamma_k'(t)) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |f_{ij}(\cdot) - f_i(\cdot)| \, \underbrace{|\gamma_k'|}_{\text{חסום}}$$

<u>הוכחה</u> <u>שלב 2</u> $\omega \in C^1$ נניח $\varepsilon_k \to 0$ שמקיימת

$$\forall k \, \forall t \quad |\gamma_k(t) - \gamma(t)| \le \varepsilon_k$$

נניח

$$\Gamma_k : B_k \to \mathbb{R}^n \qquad \mathbb{R}^2 \supseteq B_k = [t_0, t_1] \times [0, \varepsilon_k]$$

$$\Gamma_k(t, u) = \left(1 - \frac{u}{\varepsilon_k}\right) \gamma_k(t) + \frac{u}{\varepsilon_k} \gamma(t)$$

הומוטופיה ~

$$\Gamma_k([t_0, t_1] \times \{0\}) = \gamma_k$$

$$\Gamma_k([t_0, t_1] \times \{\varepsilon_k\}) = \gamma$$

ו- $\Gamma_k \in C^1$ כי $\gamma, \gamma_k \in C^1$.

$$\int_{\Gamma_k} d\omega = \int_{\partial \Gamma_k} \omega = \int_{\gamma_k} \omega - \int_{\gamma} \omega + \underbrace{\int_{\beta_k} \omega}_{\downarrow} + \underbrace{\int_{\alpha_k} \omega}_{\downarrow} \to 0$$

$$\alpha_k = \Gamma_k \big|_{t = t_0} \qquad \beta = \Gamma_k \big|_{t = t_1}$$

כי הגבול שלהם הוא 0.

ו- ω חסומה על Γ_k

כל הנגזרות חסומות - כי הנגזרות החלקיות חסומות על:

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_k(t, u) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon_k} (\gamma(t) - \gamma_k(t)) \right| \le 1$$

$\downarrow$ מהגדרת ε_k

מספיק לכן להראות ש $\int_{\Gamma_k} \omega \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

ואכן של ריבוע, כי הקטעים הניצבים תורמים כמעט אותו כמו $\int_{\alpha_k} \omega$

ולכן להשתמש שואף ל 0.

צריך להשתמש בתנאים המספיקים

לפי t של $\gamma_k(t)$.

למשל בגלל מתכנסת ל

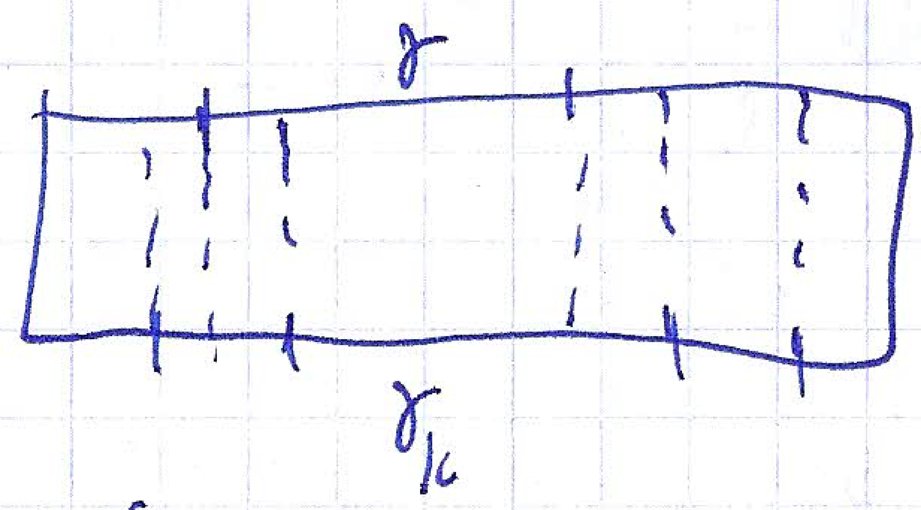
γ_k אינן C^1 במקרה?

כי אז

נקודות γ ו- γ_k לפי קודם הסעיף.

כל מקטע נמצא בתוך כדור.

ולכן שווה.



פרק יג

שימושים מעניינים ופשוטים וקלאסיים

~~אם~~ k-תבניות ב $\mathbb{R}^n$ מוגדרות ע"י $\binom{n}{k}$ פונקציות

לפי הגדרה.

אבל כאשר $n \le 3$ $\binom{n}{k} \le n$ והכל פשוט.

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$\quad \parallel \quad \parallel$$
$$\quad n \quad n$$

ω 2-תבנית

$$\sum_{i<j} f_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$$

$$\omega(x,h,k) = \sum_{i<j} f_{ij} \cdot \begin{vmatrix} h_i & k_i \\ h_j & k_j \end{vmatrix} = f_{1,2}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix} + f_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_3 & k_3 \end{vmatrix} + f_{2,3} \cdot \begin{vmatrix} h_2 & k_2 \\ h_3 & k_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_{23} & h_1 & k_1 \\ -f_{13} & h_2 & k_2 \\ f_{12} & h_3 & k_3 \end{vmatrix} = \det(H(x), h, k)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{23}(x) \\ -f_{13}(x) \\ f_{12}(x) \end{pmatrix}$$

בגלל כך נקבל דטרמיננטה $L(h,k)$ בילינארית אנטיסימטרית ב $\mathbb{R}^3$

~~אם~~ לכל וקטור $\mathbb{R}^3 \ni x$

$$L(h,k) = \det(x,h,k)$$

כעת נראה השוואה בין 2-תבניות דיפרנציאליות לבין שדות וקטוריים

$$\omega \Longleftrightarrow H$$

$$\omega(x,h,k) = \det(H(x),h,k)$$

H שדה וקטורי — לכל נקודה נותן וקטור. ו-ω 2-תבנית דיפ'

$$\Gamma : B \to \mathbb{R}^3, \quad B \subset \mathbb{R}^2$$

$$\int_\Gamma \omega = \int_B \omega\left(\Gamma(u), (D_1\Gamma)_u, (D_2\Gamma)_u\right) du = \int_B \det\left[H(\Gamma(u)), (D_1\Gamma)_u, (D_2\Gamma)_u\right] du$$

הגדרה: זה השטף של H דרך Γ

אם השדה שלנו הוא שדה מהירות (של נוזל) אז השטף הוא כמות החומר שעוברת דרך משטח Γ ליחידת זמן.

תזכורת

1-תבניות

$$L(h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{פונקציונל} \longleftrightarrow \text{וקטור } x \in \mathbb{R}^3$$

$$L(h) = \langle x, h\rangle$$

ויש גם 1-תבניות — $E(\cdot)$ שדה וקטורי $\longleftrightarrow$ ω_1 1-תבנית דיפרנציאלית

האינטגרל לפי 1-תבנית לאורך מסילה

$$\omega = \sum_i f_i\, dx_i$$

$$\omega(x,h) = \sum_i f_i h_i = \langle E(x), h\rangle$$

$$E(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$$

$$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \langle E(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$$

פירוש פיזיקלי: עבודה של שדה וקטורי.

אם $E \perp \gamma$ לכל t אז העבודה תהיה אפס. אם $H \parallel \Gamma$ אז השטף של H דרך Γ יהיה 0

תבנית 2 $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ ⟷ מתאים שדה וקטורי H

וכן ω_2 זו תבנית 1 ⟷ E_2

ω_1 זו תבנית 1 ⟷ מתאים שדה וקטורי E_1

$$H(x) = E_1(x) \times E_2(x)$$

כאשר $\times$ זו מכפלה וקטורית.

$$f\omega \xleftrightarrow[\text{וקטורי}]{\text{מתאים}} f \cdot E$$

~~[illegible]~~

$\omega = f$ – תבנית 0

$d\omega$ תבנית 1 $\xleftrightarrow[\text{גרדיאנט}]{\text{מתאים}}$ $E = \nabla f$

תבנית 1 ω ⟷ E

תבנית 2 $d\omega$ ⟷ H

נגדיר $H = \mathrm{curl}(E)$ כאשר רוטור / curl (רוטור)

$$\mathrm{curl}\, E = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} H_1 &= D_2E_3 - D_3E_2 \\ H_2 &= D_3E_1 - D_1E_3 \\ H_3 &= D_1E_2 - D_2E_1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{תבנית 0} & \text{פונקציה} & \text{פונקציה} \\ \downarrow d & & \downarrow \nabla \\ \text{תבנית 1} & \text{מתאים שדה וקטורי} & E \\ \downarrow d & & \downarrow \mathrm{curl} \\ \text{תבנית 2} & \text{מתאים שדה וקטורי} & H \end{array}$$

$$\forall f \quad d(df) = 0 \quad \longrightarrow \quad \forall f \quad \mathrm{curl}(\nabla f) = 0$$

[illegible]

~~2~~משטח סינגולרי Γ > $\mathbb{R}^3$

$\underbrace{}$ (= 2-קוביה)

$$\int_\Gamma d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$$

שטף של H דרך Γ
curl(E)

עבודה של E
לאורך ∂Γ

3-וקטורי של E סגור ∂Γ

כל נוסחי משפט סטוקס הקלאסיים (ב-3)

משפט סטוקס הכללי כל
לפתור מתוך
ס-אלגברה ~~...~~ יריעות (manifold)

שטף של H
דרך Γ $\longrightarrow \int_\Gamma H = \int_B \omega_2 = \int_B \det\left(H(\Gamma(u)), (D_1\Gamma)_u, (D_2\Gamma)_u\right) du$

ω_2 מייצגת את H לפי הטבלה
במחברת.

עבודה של E לאורך E $\longrightarrow \int_\gamma E = \int_{t_0}^{t_1} \langle E(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

אם γ סגורה כל "סירקולציה"

כמו $n=2$

$0, 1=n-1, n=2$

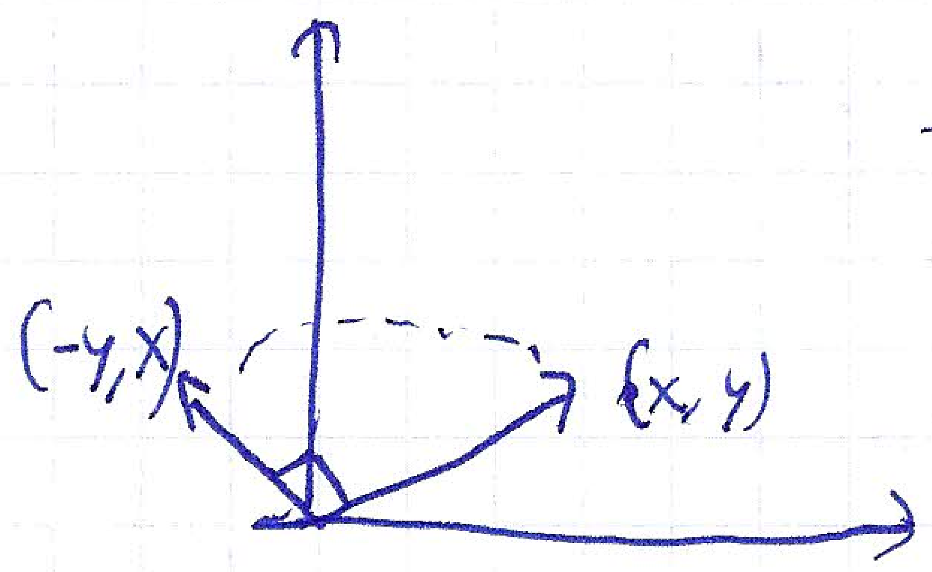
1-תבנית $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$

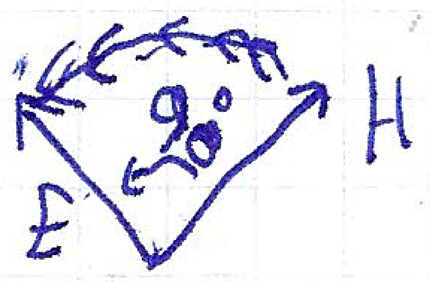
$$\omega(x,h) = f_1(x) h_1 + f_2(x) h_2 = \langle E(x), h \rangle \qquad E(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\begin{vmatrix} f_2(x) & h_1 \\ -f_1(x) & h_2 \end{vmatrix} = \det(H(x), h) \qquad H(x) = \begin{pmatrix} f_2(x) \\ -f_1(x) \end{pmatrix}$$

נוסחת סיבוב ב 90° -





ω 1-תבנית

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle E(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

עבודה לאורך γ של E

$$\|$$

שטף של H דרך γ $\longleftarrow \int_{t_0}^{t_1} \det(H(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt$

גרדיאנט $\nabla f = E \longleftrightarrow \omega = df \to$ [illegible]

f - פונקציה

ω - 1 תבנית

$d\omega$ - 2 תבנית

0
1
1
2

$$d\omega = f \, dx_1 \wedge dx_2$$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \qquad d\omega = -D_2 f_1 \, dx_1 \wedge dx_2 + D_1 f_2 \, dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$= \underbrace{(D_1 f_2 - D_2 f_1)}_{\text{curl } E} \, dx_1 \wedge dx_2$$

$$\omega(x,h) = \langle E(x), h \rangle \qquad E(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{curl } E = D_1 E_2 - D_2 E_1 = D_1 f_2 - D_2 f_1$$

curl של E הוא פונקציה. למה?

curl הוא מכפלה וקטורית (סקלרית) [illegible] במישור שלנו

מכיוון שאנחנו ב $\mathbb{R}^2$ אפשר להתייחס לוקטור - ואז רק

הרכיב השלישי של המכפלה, כלומר ה curl הוא מספר

פונקציה מ $\mathbb{R}^2$ ל $\mathbb{R}$.

$$\int_{\partial \Gamma} \omega = \int_\Gamma d\omega = \int_\Gamma \text{curl } E$$

$\int_{\partial \text{מלבן}} E \leftarrow$ [illegible]

דיפאומורפיזם - $\Gamma: B \to \Gamma(B)$ אם

$$\int_\Gamma f(x,y) \, dx \wedge dy = \int_B f(\Gamma(u)) \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u_1,u_2)} \, du_1 \wedge du_2 = \pm \int_{\Gamma(B)} f$$

למה $\pm$? כי $*$ הוא $|J|$ או J, יעקוביאן

[illegible] כי הם דיפאומורפיזם

[illegible]

$\tilde{E}(x,y) = \begin{pmatrix} E_1(x,y) \\ E_2(x,y) \end{pmatrix}$ [illegible] "[illegible]" $\int_{\partial \text{מלבן}} E = \int_{\Gamma(B)} \text{curl}(E) \, dx \, dy$

$\text{curl}(E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{curl } \tilde{E} \end{pmatrix}$ אז $E(x,y,z) = \begin{pmatrix} E_1(x,y) \\ E_2(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$ אם

(12 כ7) גרין