הרצאה 4 גאומטריה ד

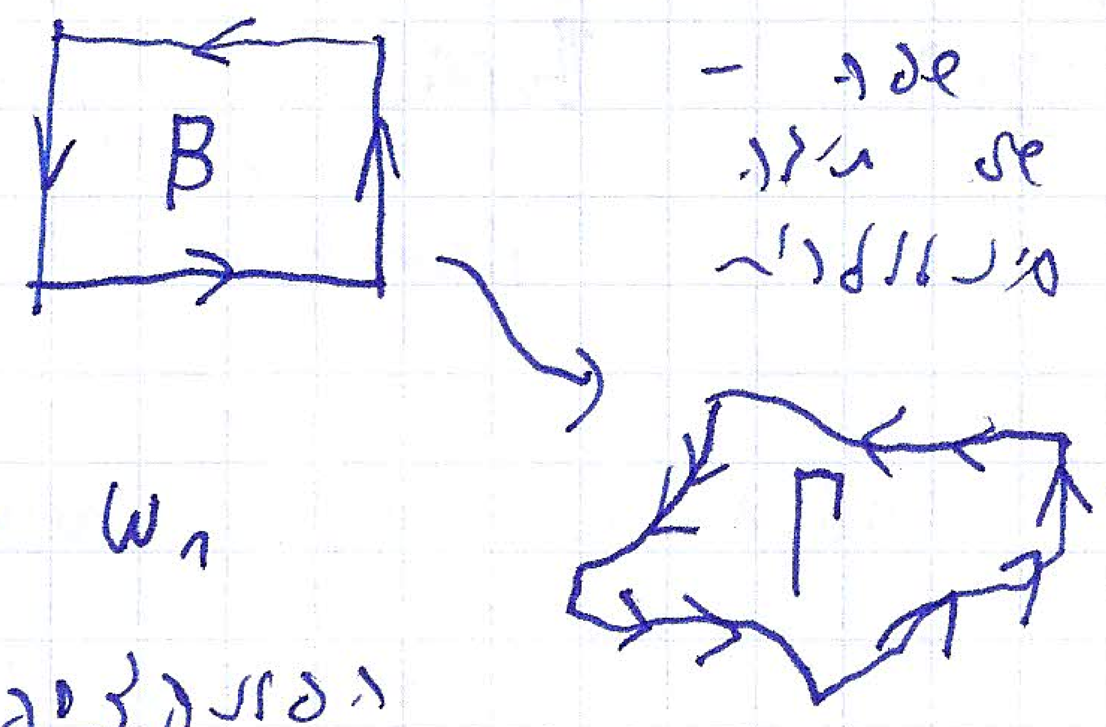
$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

שרשרת / תמונה

ראינו הוכחת פשוטה - משפט סטוקס למימד 1

נוכיח את אותה הטענה למימד 2

נכון פורמלית שלב - של תילי מינימלי



השפה של Γ היא הפעלת Γ על השפה של B.

ω_1 לא תלוי

$$\Gamma \longmapsto \int_{\partial\Gamma} \omega_1 \quad \text{הפונקציה}$$

כמו אינטגרל.

שמור אינטגרל כי

השפה מתבטלת.

$$\int_{\partial\Gamma} \omega_1 \overset{?}{=} \int_\Gamma d\omega_1$$

ראינו גם $\partial(\partial C) = 0$

אם $\omega_1 = d\omega_0$

אז

$$\int_{\partial\Gamma} \omega = \int_{\partial\Gamma} d\omega_0 \doteq \int_{\partial(\partial\Gamma)} \omega_0 = 0$$

$\partial(\partial\Gamma) = 0$

אבל $d(d\omega_0) = d\omega_1 = 0$

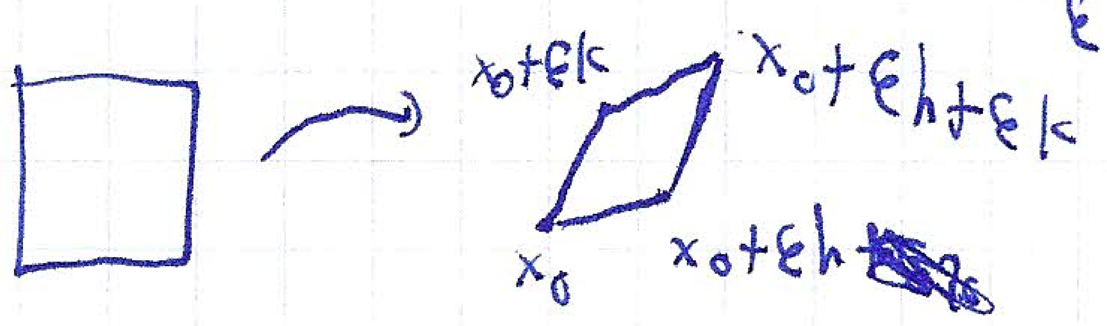
רוצים לשים מוטיבציה $d - d\omega_1$

[בגלל אין סימן לצערנו הדירוג, כי במקרה הכללי לצערי שאין לנו תמיד להכליל]

נקודות $x_0, h, k \in \mathbb{R}^n$ ניקח

$$\Gamma_\varepsilon : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma_\varepsilon(u_1, u_2) = x_0 + \varepsilon u_1 h + \varepsilon \cdot u_2 k$$



הגבול של הנפח פרופורציונלי ל ε^2,

לכן מתאר לנרמל שכיח

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \int_{\partial\Gamma_\varepsilon} \omega_1$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial\Gamma_\varepsilon} \omega_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \omega_1(x_0 + \varepsilon t h, \varepsilon h)\, dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \omega_1(x_0 + \varepsilon h + \varepsilon t k, \varepsilon k)\, dt +$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\int_0^1 \omega_1(x_0+\varepsilon k+\varepsilon t h, \varepsilon h)\,dt\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \omega_1(x_0+\varepsilon t k, \varepsilon k)\,dt =$$

לכיוון ההפוך

ישר כמו למעלה

ε יוצא החוצה

בשניהם מתבטל

כי w 1-תבנית

מתנהג טוב

ε שווה ל $\frac{1}{\varepsilon^2}$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1 \omega_1(x_0+\varepsilon h+\varepsilon t k, k) - \omega_1(x_0+\varepsilon t k, k)\,dt\right]$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1 \omega_1(x_0+\varepsilon k+\varepsilon t h, h) - \omega_1(x_0+\varepsilon t h, h)\,dt\right].$$

$$= \int_0^1 \frac{\omega_1(x_0+\varepsilon h+\varepsilon t k, k) - \omega_1(x_0+\varepsilon t k, k)}{\varepsilon}\,dt + \int$$

$$\approx D_h \omega_1(\cdot,k)\Big|_{x_0} \qquad \approx D_k(\omega_1(\cdot,h))\Big|_{x_0}$$

כמו כן

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial \Gamma_\varepsilon} d\omega_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (d\omega_1)(x_0,h,k)$$ מתכנס

ולכן הגבול − $d(\omega_1)$ · בגבול של (2-תבנית)

$$\left[D_h \omega_1(\cdot,k) - D_k \omega_1(\cdot,k)\right]\Big|_{x_0}$$

<u>הגדרה</u>

עבור ω_1 1-תבנית חלקה C^1 שהגדר

$$(d\omega_1)(\cdot,h,k) = D_h\omega_1(\cdot,k) - D_k\omega_1(\cdot,h)$$

ניסוח משפט סטוקס עבור מימד 2 -

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C}\omega$$

לכל 2 שרשרת C ב $\mathbb{R}^n$

ולכל 1-תבנית ω חלקה C^1 ב $\mathbb{R}^n$.

$k=0,1,2,\dots,m$ תבניות k אכן C^m ב $\mathbb{R}^n$ הן מרחב וקטורי!

<u>הגדרה</u> $f\in C^m(\mathbb{R}^n)$. w (0-תבנית) k תבנית אז fw (כפל) k תבנית

$$(fw)(x,h_1,\dots,h_k)=f(x)\cdot w(x,h_1,\dots,h_k)$$

ויש לנו שמתקיים: $g(fw)=(gf)w$

w_0 היא 0-תבנית ב C^1. $w_0\to dw_0$ ~~...~~ לינארית ב w_0.

איך נגדיר $d(fw_0)$? זה f וגם w_0 הן 0-תבניות ב C^1

נרצה שיתקיים ~~אז~~ $d(fg)=f\cdot dg+g\cdot df$ כאשר $f\cdot dg$ מוגדר ככפל פונק' בתבנית כמו שעשינו לפני.

אם $f(x_1,\dots,x_n)=x_i$ אז $df=dx_i$ כאשר הגדרנו:

$$(dx_i)(x,h)=h_i$$

נזכיר כי $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ לינארית היא מהצורה

$$L(h)=c_1h_1+\dots+c_nh_n$$

ולכן w_1 1-תבנית היא מהצורה

$$w_1(x,h)=\sum_{i=1}^n f_i(x)\cdot h_i=\sum_{i=1}^n f_i(x)\cdot(dx_i)(x,h)$$

$$w_1=\sum_{i=1}^n f_i\,dx_i$$

נשים לב כל 1-תבנית אפשר לכתוב ככה, ~~...~~ היא סכום של כפל של f_i ו dx_i

f_i פונק' רגילה, dx_i 1-תבנית

אם $f\in C^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$ 0-תבנית

$$df(x,h)=D_hf(x)=\sum_{i=1}^n (D_if)_x\cdot h_i$$

$$df=\sum_{i=1}^n D_if\cdot dx_i=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

אם ω_1 היא 1-פורמה ב-R^1, אזי עבור $[t_0,t_1]$ (...)

$$\int_{[t_0,t_1]} \omega = \int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\omega(t, e_1)}_{f_1(t)}\, dt$$

כאשר - $\gamma:[t_0,t_1]\to[t_0,t_1]$, $\gamma(t)=t$

$\omega_1 = f_1\, dx_1$

$$\boxed{\int_{[t_0,t_1]} f_1\, dx_1 = \int_{t_0}^{t_1} f_1(x)\, dx}$$

[illegible] = [illegible]

אם $\int_B f = \int_B f$

מכפלה חיצונית של w_1, w_2 [illegible] 1-פורמות

$$\omega = w_1 \wedge w_2 \qquad \omega(x,h,k) = w_1(x,h)\cdot w_2(x,k) - w_1(x,k)\, w_2(x,h)$$

$$w_2 \wedge w_1 = -w_1 \wedge w_2 \qquad \text{אנטי סימטרי כי}$$

$$(f w_1)\wedge(g w_2) = (f\cdot g)(w_1\wedge w_2)$$

שאלה:

$$dx_i \wedge dx_j = ?$$

$$(dx_i \wedge dx_j)(x,h,k) = h_i k_j - k_i h_j = \begin{vmatrix} h_i & k_i \\ h_j & k_j \end{vmatrix}$$

אם $L: R^n \times R^n \to R$ היא בילינארית

$$L(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, h_i k_j$$

אם L אנטי סימטרית

$$? \quad c_{ij} = -c_{ji}$$

$$L(h,k) = \sum_{i<j} c_{ij}(h_i k_j - h_j k_i) = \sum_{i<j} c_{ij}\cdot\begin{vmatrix} h_i & k_i \\ h_j & k_j \end{vmatrix}$$

לכן כל 2-פורמה ω_2 היא

$$\omega_2(x,h,k) = \sum_{i<j} f_{ij}(x)\cdot\begin{vmatrix} h_i & k_i \\ h_j & k_j \end{vmatrix}$$

$$\omega_2 = \sum_{i<j} f_{ij}\, dx_i\wedge dx_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}\, dx_i\wedge dx_j \qquad f_{ij} = -f_{ji}$$

דוגמה

$$\omega(x,h,k) = x_1\begin{vmatrix} h_2 & k_2 \\ h_3 & k_3 \end{vmatrix} \quad \text{אם}$$

$$\omega = x_1(dx_2\wedge dx_3) \quad \text{אז}$$

אם ω תבנית-2 ב-$\mathbb{R}^2$ אז

$$\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2$$

$$\omega(x, e_1, e_2) = f(x) \underbrace{\det(e_1, e_2)}_{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1} = f(x)$$

אם $B \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי.

$$\int_B \omega = \int_B f\, dx_1 \wedge dx_2 = \int_B \omega(x, e_1, e_2) = \int_B f$$

קל אם כשחושבים את סכום האינטגרל שווה ~~[illegible]~~ מינוח המאמר

סימון של ω על B זהה לסימון של f על B.

טענה: ~~[illegible]~~

$d(d\omega_0) = 0$ לכל ω_0 גזירה פעמיים

$$C^2 \ni \omega_0 = f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\omega_1 = d\omega_0 = \sum_i D_i f\, dx_i$$

$$\omega_2 = d\omega_1 = ?$$

$$\omega_2(x, h, k) = (d\omega_1)(x, h, k) = D_h \underbrace{\omega_1(\cdot, k)}_{D_k f} - D_k \underbrace{\omega_1(\cdot, h)}_{D_h f} =$$

$$= (D_h D_k - D_k D_h) f = 0$$

ולכן $d(d\omega_0) = 0$ כנדרש.

עכשיו נחשב עבור f, g פונקציות את $d(\underbrace{\omega_1}_{})$

$$d(f\, dg)$$

$$\omega_2(\cdot, h, k) = D_h \omega_1(\cdot, k) - D_k \omega_1(\cdot, h) = D_h(f(\cdot) D_k g(\cdot)) - D_k(f(\cdot) D_h g(\cdot)) =$$

$$\overset{(ק)}{=} (D_h f) \cdot (D_k g) + f D_h D_k g - (D_k f)(D_h g) - f D_k D_h g =$$

(ק) נגזרת מכפלה.

$$= D_h f \cdot D_k g - D_k f \cdot D_h g =$$

$$= (df)(x, h) \cdot (dg)(x, k) - (df)(x, k)(dg)(x, h) =$$

$$= (df \wedge dg)(x, h, k)$$

$$d(f\, dg) = df \wedge dg$$

והוכחנו כלל ישר -

$\omega_2 = d(f\omega_1) = df \wedge \omega_1 + f d\omega_1$ מתאפס כמו קודם,

כלומר גם מתאפסים כמו שם.

ו-כל הנוסחה ~~מתאפסת~~ תהיה $\omega_1 = dg$ מתקיים כי $d\omega_1 = d(dg) = 0$.

כדי עבור את הטענה כללית

$$\omega_1 = \sum_i f_i dx_i$$

$$d\omega_1 = \sum_i d(f_i dx_i) = \sum_i (df_i) \wedge (dx_i)$$

כל הצגה שקולה לצורה של 2-תבנית.

$$\sum_i (df_i) \wedge (dx_i) = \sum_i \left(\sum_j D_j f_i \cdot dx_j\right) \wedge dx_i = \sum_{i,j} (D_j f_i) dx_j \wedge dx_i$$

$$\omega = \sum_{i<j} f_{ij} \cdot dx_i \wedge dx_j \Rightarrow \int_\Gamma \omega = \sum_{i<j} \int f_{ij}(\Gamma(u_1,u_2)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u_1,u_2)}}_{\left|\begin{matrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} & \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_j}{\partial u_1} & \frac{\partial x_j}{\partial u_2} \end{matrix}\right|} du_1 du_2$$

$\Gamma : B \to \mathbb{R}^n$.

(*) ונוכיח סטוקס בממד 3

כלומר $\int_\Gamma d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$. בזכות כך נוכיח

$\int_B d\omega = \int_{\partial B} \omega$ במקביל משולש, ובפרט ל

כי מקבלת משולש

$$\Gamma : B \to \mathbb{R}^l \qquad \varphi \in C^1(\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n)$$

$$\mathbb{R}^k \supseteq \cancel{\Gamma : B} \Rightarrow \varphi \circ \Gamma : B \to \mathbb{R}^n$$

אם ω k תבנית ב-$\mathbb{R}^n$

מעבירה את

$$\Gamma \mapsto \int_{\varphi\circ\Gamma} \omega$$

כל פונק' תלויה רק ב-k-ניות ב-$\mathbb{R}^l$.

יוצרת תבנית במרחב $\mathbb{R}^l$ $\varphi^*\omega$ ומקיים

$$\int_\Gamma \varphi^*\omega = \int_{\varphi\circ\Gamma} \omega$$

איך נגדיר את ~~...~~ $\varphi^* w$?

$w: (x, h_1, \dots, h_k) \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^k$

$$(\varphi^* w)(x, h_1, \dots, h_k) = w\left(\varphi(x), (D\varphi)_x(h_1), \dots, (D\varphi)_x(h_k)\right)$$

$x \in \mathbb{R}^l$, $h \in \mathbb{R}^l$

למה זה נכון (הגיוני?) דרך ה- $\varphi(x)$ של הנקודה כדי לשמור

על הקשר הנקודתי בין w לבין $\varphi^* w$ וגם Γ ל- $\varphi\circ\Gamma$

וגם נציג לכל וקטור של h_i העתקה לינארית מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^l$, ולכן נקבל

$D\varphi \in Mat(l\times n)$.

צריך להראות $\int_\Gamma \varphi^* w = \int_{\varphi\circ\Gamma} w$.

אם $w \in C^m$ $\varphi \in C^{m+1}$ אז $\varphi^* w \in C^m$ (מכפלה רציפה)

בפרט אם $k=0$ אז לא צריך להגדיר $D\varphi$ בהגדרת $\varphi^* w$

ומספיק $\varphi \in C^m$

ההעתקה $w \to \varphi^* w$ לינארית.

תכונות $\varphi^* w_0 = \varphi^* f = f\circ\varphi$ כאשר $f = w_0$ 0-תבנית.

$$\varphi^*(f\cdot w) = (\varphi^* f)(\varphi^* w) = (f\circ\varphi)\cdot(\varphi^* w)$$ ~~...~~ תרגיל

אם Γ היא יריעה פרמטרית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}^n$, C^1,

משתמשים באותה הגדרה כמו עבור φ ואז

$$(\Gamma^* w)(u, h_1, \dots, h_k) = w\left(\Gamma(u), (D_{h_1}\Gamma)_u, \dots, (D_{h_k}\Gamma)_u\right)$$

ובפרט נבחר $h_1, \dots, h_k = e_1, \dots, e_k$ כסדר הסטנדרטי ואז

$$(\Gamma^* w)(u, e_1, \dots, e_n) = w\left(\Gamma(u), (D_{e_1}\Gamma)_u, \dots, (D_{e_k}\Gamma)_u\right)$$

ולכן כמו בהגדרה של אינטגרל של תבנית דיפרנציאלית על יריעה פרמטרית

$$\int_\Gamma w = \int_B w\left(\Gamma(u), (D_1\Gamma)_u, \dots, (D_k\Gamma)_u\right) du = \int_B (\Gamma^* w)(u_1, e_1, \dots, e_n) = \int_B (\Gamma^* w)$$

$$\int_{\varphi\circ\Gamma} \omega = \int_B (\varphi\circ\Gamma)^* \omega \overset{?}{=} \int_B \Gamma^*(\varphi^*\omega) \underset{\downarrow}{=} \int_\Gamma \varphi^*\omega$$

הגדרת קודם

$$\int_B \Gamma^* \omega = \int_\Gamma \omega$$

כאן רק הגדרות

$$(\varphi\circ\Gamma)^*\omega = \Gamma^*\varphi^*\omega)$$

ובפועל פותחים את ההגדרה מקבלים כלל שרשרת

ובנוסף קבלה שכזו,

בכלל $\int_{\varphi\circ\Gamma} \omega = \int_\Gamma \varphi^*\omega$, כלומר $\int_{\varphi\circ C} \omega = \int_C \varphi^*\omega$

הוכחה $\varphi^*(d\omega) \overset{?}{=} d\,\varphi^*\omega$?

0-תבנית $\omega = f$ $\qquad \varphi^*(df) \overset{?}{=} d\,\varphi^* f$

$$\varphi^*(df)\,(x,h) = (df)\left(\varphi(x), (D_h\varphi)_x\right) = (D f)_{\varphi(x)}\left((D_h\varphi)_x\right) =$$

$$\underset{\text{כלל שרשרת}}{=} (D_{f\circ\varphi})_x(h) = \left(d(f\circ\varphi)\right)(x,h) \underset{\downarrow}{=} \left(d(\varphi^* f)\right)(x,h) =$$

אם f 0-תבנית אז $f\circ\varphi = \varphi^* f$

<u>טענה</u>

יהיו תבניות - ω_1, ω_2 על מרחב

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2) = \varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2)$$

<u>הוכחה</u>

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)(x,h,k) = (\omega_1\wedge\omega_2)\left(\varphi(x), (D\varphi)_x h, (D\varphi_x)k\right) =$$

$$= \omega_1\left(\varphi(x), (D\varphi)_x h\right)\cdot\omega_2\left(\varphi(x), (D\varphi)_x k\right) - \omega_1\left(\varphi(x), D\varphi_x k\right)\cdot\omega_2\left(\varphi(x), (D\varphi)_x h\right) \quad (*)$$

וגם כן

$$(\varphi^*(\omega_1))\wedge(\varphi^*\omega_2)(x,h,k) = \varphi^*(\omega_1)(x,h)\,\varphi^*(\omega_2)(x,k) - \varphi^*\omega_1(x,k)\cdot\varphi^*\omega_2(x,h) =$$

$$= (*)$$

<u>כל יש ציור</u>

למה: לכל ω [illegible] **תבנית** אז $\varphi^*(d\omega)=d\varphi^*(\omega)$ ← הוכחנו עבור 0-תבניות

הוכחה: $\omega=\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$

מספיק עבור לתבנית ל $\omega=f_i dx_i$

$$\begin{tikzcd}
f_i\,dx_i \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "d"] & \varphi^*(f_i)\cdot d\varphi^*(x_i) \arrow[d, "d"] \\
df_i\wedge dx_i \arrow[r, "\varphi^*"] & d\varphi^*(f_i)\wedge d\varphi^*(x_i)
\end{tikzcd}$$

~~אבל~~ ידוע כי

$$\varphi^*(f_i dx_i) = \varphi^*(f_i)\cdot\varphi^*(dx_i) = \varphi^*(f_i)\cdot d\varphi^*(x_i)$$

ראינו $\varphi^* df = d\varphi^* f$ לפונקציות

ולכן הגרף הכוון שקול.

$$\varphi^*(df_i\wedge dx_i) = \varphi^*(df_i)\wedge\varphi^*(dx_i) = d\varphi^*(f_i)\wedge d\varphi^*(x_i)$$

ראינו קודם

מה שראינו עבור 0-תבניות.

ולכן הגרף מתקיים

$$d(\varphi^*(f_i dx_i)) = \varphi^*(d(f_i x_i))$$

תרגיל

$\Gamma, \Gamma_i : B\to\mathbb{R}^n$ k-תאים סינגולריים כך ש

$\Gamma_i\to\Gamma$ ב-C^1 ~~[illegible]~~ כלומר

$$\max_{u\in B}|\Gamma_i(u)-\Gamma(u)|\xrightarrow[i\to\infty]{}0$$

$$\forall j\quad \max_{u\in B}|D_j\Gamma_i(u)-D_j\Gamma(u)|\xrightarrow[i\to\infty]{}0$$

כלומר התכנסות במ"ש f התכנסות במ"ש של הנגזרות.

אזי לכל k-תבנית ω ב-$\mathbb{R}^n$: $\int_{\Gamma_i}\omega\to\int_\Gamma\omega$

הוכח אותו דבר עבור שרשראות $\underbrace{\text{סלה}}_{}$ (תבנית $k=2$ +) מסוג

לכל $k-1$ תבנית ב-$\mathbb{R}^n$: $\int_{\partial\Gamma_i}\omega\to\int_{\partial\Gamma}\omega$

למה לכל $\Gamma \in C^1(B \to \mathbb{R}^n)$ קיימת $\Gamma_i \in C^2(B \to \mathbb{R}^n)$

כך ש $\Gamma_i \to \Gamma$ ב C^1

הוכחה: נלקח ממוצעים סביב ε

$$\Gamma_\varepsilon(u_1,u_2) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{[u_1,u_1+\varepsilon]\times[u_2,u_2+\varepsilon]} \Gamma\left(\frac{v_1}{1+\varepsilon}, \frac{v_2}{1+\varepsilon}\right) dv_1\, dv_2$$

של הריבוע -

הנגזרת חלקית ממוצע

של הצלעות שלהן

כלל האמצעים מתבטל

קרוב לשפה

אבל בפנים

נקבל הבדל של המלבן

$$D_1\Gamma_\varepsilon(u_1,u_2) = \int(\;)\,dv_2 - \int(\;)\,dv_2$$

ממוצעים רציפים של f

לכן צריך רציפות.

לכן $D_1\Gamma_\varepsilon$ גם רציפה

שוב מקיים

Γ_ε גזירה C^2.

לכן יש התכנסות C^1 מובטחת כמו של

הנגזרת $D_p f$

הוכחה $\int_\Gamma d\omega \overset{?}{=} \int_{\partial\Gamma}\omega$

עבור $\omega \in C^1$. צריך להראות

נשים $\int_B \Gamma^*(d\omega) \overset{?}{=} \int_{\partial B}\Gamma^*(\omega)$

$\Gamma_i \xrightarrow{\text{התכנסות}} \Gamma$ ב C^1, Γ_i הן C^2, ולכן אז

לכל $\int_B \Gamma_i^*(d\omega) = \int_{\partial B}\Gamma_i^*(\omega)$ מקיימים את שלמות כי מתכנסות

אז קשורים הכל שמכפלה לאט זה רציף לשתיהן.

מספיק לכן להניח כי Γ היא C^2 וסיימנו.

ידוע $F^*(d\omega) = dF^*(\omega)$

$$\int_B dF^*(\omega) \stackrel{?}{=} \int_{\partial B} F^*\omega$$

מספיק להראות כן שלכל תיבה ב $\mathbb{R}^d \supseteq B$

$$\int_B d\omega = \int_{\partial B} \omega$$

(כי נסמן את $F^*\omega$ ב ω)

לכן כדי להוכיח את משפט סטוקס בשני המימדים

מספיק לנו להוכיח אותו על תיבה

סינגולרית טריוויאלית שמוכלת בתוך תיבה רגילה ב $\mathbb{R}^n$.