עבור $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ דיברנו על פונקציונל מסוג $\gamma\mapsto\int_{t_0}^{t} f(\gamma(t),\gamma'(t))\,dt$

עבור f קמור ו-חלקה.

כעת נדבר על $\Gamma:B\to\mathbb{R}^n$

$$\Omega(\Gamma)=\int_B f\left(\Gamma(u),(D_{e_1}\Gamma)_u,\dots,(D_{e_k}\Gamma)_u\right)du$$

$B\subseteq\mathbb{R}^k$

פונקציונל מעל משטחים שהם יריעות (במקום מסילות).

עבור f קמור k חלקה.

רצינו: $\Gamma_i\to\Gamma \Leftarrow \Omega(\Gamma_i)\to\Omega(\Gamma)$ (כלומר רציפות Ω)

אבל מה זה בכלל $\Gamma_i\to\Gamma$?

נאמר ש $\Gamma_i\to\Gamma$ אם יש ~~...~~ התכנסות נקודתית

$\forall u\in B\ \ \Gamma_i(u)\to\Gamma(u)$

וכן $\exists L$ s.t. $\forall i$: $\Gamma_i\in Lip(L)$ יש קבוע ליפשיץ אחיד.

עבור $k=2$ **טענה** אם Ω רציפה* (בהתכנסות שהגדרנו) וגזירה* (דורש f C^1) אז f מקיימת

שלכל x קבוע ו- h_1 קבוע $h_2\to f(x,h_1,h_2)$ היא קמורה.

כלומר אם $h_2=\theta h_2'+(1-\theta)h_2''$ אז $\theta\in(0,1)$

$$f(x,h_1,h_2)=\theta f(x,h_1,h_2')+(1-\theta)f(x,h_1,h_2'')$$

הוכחה- יהי $x_0,h_1,h_2,h_2',h_2''\in\mathbb{R}^n$ ו- $\theta\in(0,1)$

נגדיר $B=[0,u_1]\times[0,u_2]$

$\Gamma(u_1,u_2)=x_0+u_1h_1+u_2h_2$ משטח אפיני

שאז

נשים לב $(D_1\Gamma)_u=h_1$, $D_2(\Gamma)_u=h_2$, נגדיר Γ_i הבא:

$D_1(\Gamma_i)_u=h_1$

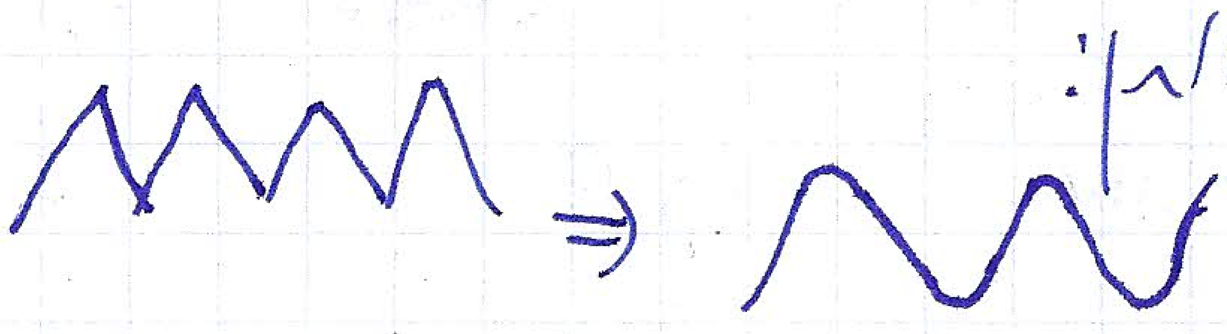
$$(D_2\Gamma_i)_u=\begin{cases}h_2' & u_2\in T_i^{o}\\ h_2'' & u_2\notin T_i\end{cases}$$

יש בעיה קטנה. למשל Γ_i מתכנסות ל Γ במובן

ליפשיץ, Γ_i גלגולים חלקים סטנדרטיים

שהן לא C^1 ויש בהן פינות זוויות.

אבל אפשר להחליק אותן:



ואז מה? התכנסות - וכן תנאי ההתכנסות אינטגרלית

כי ההפרש של הנגזרות בין הצירים קטנה. לכן אינטגרל קטן

קטן,

כאמור מתקיים

$$\int_B f(\Gamma(u), (D_1\Gamma_i)_u, (D_2\Gamma_i)_u) \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_B f(\Gamma(u), (D_1\Gamma)_u, (D_2\Gamma)_u)$$

אפשר. שכן לא Γ_i כי Γ_i קרובה במ"ש ל Γ ו f רציפה במ"ש על קומפקטים.

פונק' 1 $\quad u_2 \to \int_0^{u_1} f(\Gamma(u_1,u_2), h_1, h_2')\, du_1$

פונק' 2 $\quad u_2 \to \int_0^{u_1} f(\Gamma(u_1,u_2), h_1, h_2'')\, du$

שתי פונקציות

למעלה (הכו) הפונקציה

$$\int_0^{u_2} (\text{פונק' 1})\cdot \mathbb{1}_{T_i} + (\text{פונק' 2})\cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus T_i}\, du_2$$

$$\xrightarrow[i\to\infty]{} \theta \int_0^{u_2} (\text{פונק' 1})\, du_2 \qquad \xrightarrow[i\to\infty]{} (1-\theta)\int (\text{פונק' 2})\, du_2$$

לכן מינימום האינטגרל

$$x \to f(x,h_1,h_2) - \theta f(x,h_1,h_2') - (1-\theta) f(x,h_1,h_2'')$$

מקיימת שרק ~~[illegible]~~ כלשהו (הגיוני) קטן מ-0, ולכן היא [illegible] 0.

לכן $h_2 \to f(x,h_1,h_2)$ קמורה.

עבור פירקים

$\Gamma(u_1,u_2)=const \to \Omega(\Gamma)=0$

כי מתקיים רק אם $f(x,0,0)=0$.

מה עם $f(x,h_1,0)=0$

? או $f(x,0,h_2)=0$

כן

Γ שווה קבוע מוגדר ל רק מישור

גם כן $\Omega(\Gamma)=0$

$\Gamma(u_1,u_2)=x_0+u_2h_2$ נותן פרמטריזציה ל u_2

לינאריות

אם (נציגות)

$h_1=h_2 \to f(x,h_1,h_2)=0$ מתקיים

למה? $f(x,h_2,h_1)=-f(x,h_1,h_2)$ צריך

~~$\Gamma(u_1,u_2)=x_0+u_1h_1+u_2h_2$~~

נגדיר $L(h_1,h_2)$

אם תבנית ביליניארית

$\underbrace{L(h_1,h_1)}_{=0}+L(h_2,h_2)+L(h_1,h_2)+L(h_2,h_1)=L(h_1+h_2,h_1+h_2)\overset{\text{לכן}}{=}0$

$\boxed{\text{הגדרה}}$

תהא תבנית דיפרנציאלית מסדר k רציפה C^m ב-R^n (כן)

פונקציה $\omega\in C^m(R^n\times(R^n)^k\to R)$ כך שלכל x הפונקציה

$\omega(x,\cdot,\ldots,\cdot)$ (היא) תבנית מולטי-ליניארית אנטי-סימטרית.

מקבלים אינטגרל של k-תבנית

$\boxed{\text{הגדרה}}$

$$\int_\Gamma \omega=\int_B \omega(\Gamma(u),(D_1\Gamma)_u,\ldots,(D_k\Gamma)_u)\,du$$

פרק 11

שפה, שלבנים תבניות ומשפט סטוקס.

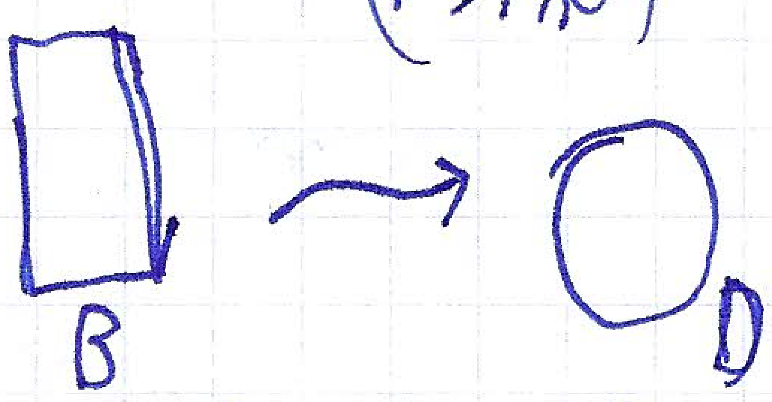
אם ω (כו') 2-תבנית ב $\mathbb{R}^2$ אז

אם $B\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום אז $\Gamma(u)=u$ (כו'-יריעה) פרמטריזציה של B

אזי
$$\int_\Gamma \omega = \int_B \omega(u,e_1,e_2)\,du$$
$$= \int_B \omega(\cdot,e_1,e_2)$$

עבור E קבוצה-
$$\int_E \omega := \int_E \omega(\cdot,e_1,e_2)$$

לכדור היחידה
$$\Gamma(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$(r,\theta)\in \underbrace{[0,1]\times[0,2\pi]}_{B}$$



$$D=\overline{B(0,1)}$$

$$\int_\Gamma \omega = \int_B \omega\left(\underset{\Gamma(u)}{\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\end{pmatrix}}, \underset{(D_1\Gamma)_u}{\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}}, \underset{(D_2\Gamma)_u}{\begin{pmatrix}-r\sin\theta \\ r\cos\theta\end{pmatrix}}\right)$$

$$\int_D \omega = \int_D \omega(\cdot,e_1,e_2) = \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \left(\omega\left(\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\end{pmatrix}, e_1,e_2\right)\right)$$

נכון ש"ש כי

$$L\left(\underset{\cos\theta e_1+\sin\theta e_2}{\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}}, \underset{\begin{matrix}-r\sin\theta e_1 \\ r\cos\theta e_2\end{matrix}}{\begin{pmatrix}-r\sin\theta \\ r\cos\theta\end{pmatrix}}\right) = r\,L(e_1,e_2)$$

לכל תבנית בילינארית -

פשוט?

כי

$$L\begin{pmatrix}\cos & -r\sin \\ \sin, & r\cos\end{pmatrix} = -r\cos\sin L(e_1,e_1) + r\cos^2 L(e_1,e_2)$$
$$-r\sin^2 L(e_2,e_1) + r\cos\sin L(e_2,e_2)$$
$$= r\,L(e_1,e_2)$$

לכן (כו')סימטרית אנטי.

לפני כן שזה פרמטריזציה סינגולרית ~~...~~

מקומית של הגבול לא מקבל איש את הגבול של המעגל. אלא.

אינטואיציה.

הגבול הוא של הפנים + ציפ'

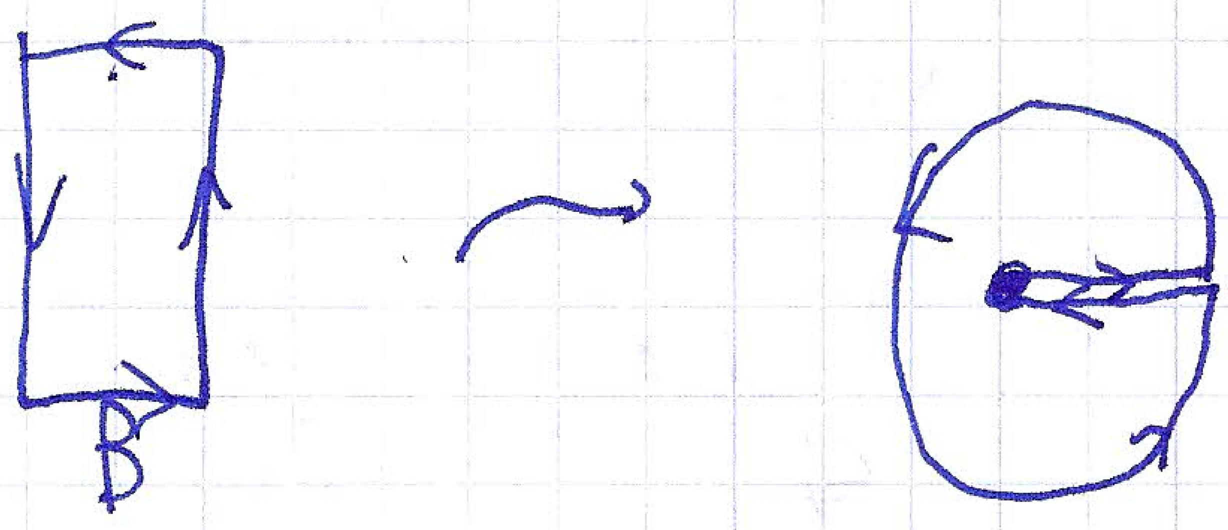
מחולק של משפט קונטיננטליזמי, ש... התיצג

המשולש של שלה, ולא של מקומה, שאינה התיצג.

המשולש של שפה.

לכן Γ מקבל D הפרמטריזציה ... של הצלע ציפרמטריזציה.

ומה זה שפה?



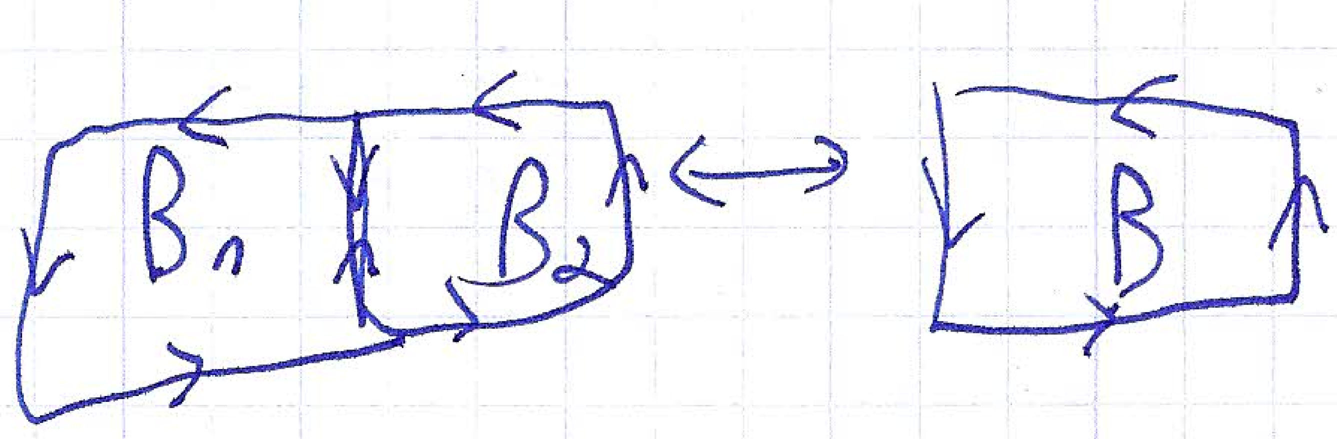
אינטואיטיבית צריך להתקיים - $\int_{\partial D}\omega_1 = \int_{\partial\Gamma}\omega_1$ לא הצלעות צריך איש' של השפה.

כי $\Longleftrightarrow$

לפי שני הכיוונים של הקטע $[0,1]$ "מתבטלים"

כי ω_1 ...

וכל לפי כמו קודם. זה מתקבל? ...



$$\int_B \omega_2 = \int_{B_1}\omega_2 + \int_{B_2}\omega_2$$

אולם גם

$$\int_{\partial B}\omega_1 = \int_{\partial B_1}\omega_1 + \int_{\partial B_2}\omega_1$$

<u>הגדרה</u> p-שרשרת (סינגולרית) היא צירוף לינארי פורמלי
של תאי p סינגולריים:

$$C = c_1\cdot\Gamma_1 + \dots + c_p\cdot\Gamma_p$$

המקדמים הם מספרים שלמים את C כפונקציה מ-
סינגולריות (שאינן רציפות או אוריינטציה)
ששולחת כפונקציה "אנטיסימטרית":

$$C(\Gamma_1) = c_1, \dots, C(\Gamma_p) = c_p$$

ואחרת

$$C(\bar{\Gamma}) = 0$$

פורמלי כאלה (עם משקל סופי) הן מודול חופשי.

הערה כל תא (עם אוריינטציה)

$$\Gamma = 1\cdot\Gamma$$

<u>הגדרה</u>

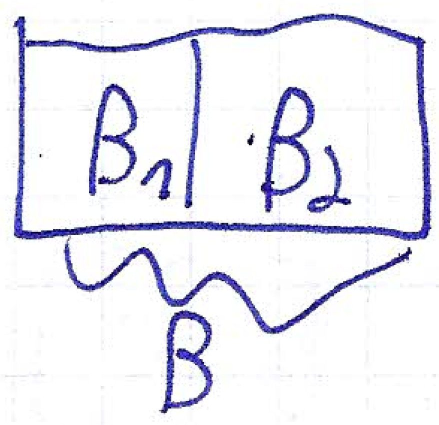
$$\int_C \omega = c_1\int_{\Gamma_1}\omega + \dots + c_p\int_{\Gamma_p}\omega$$

הסימון כאן הוא דואליות - פונקציונל על C בתחום ω גזירה,
פונקציונל על ω בתחום C קבועה.

<u>הגדרה</u> נאמר ש $C_1 \sim C_2$ אם

$$\int_{C_1}\omega = \int_{C_2}\omega$$

<u>לכל</u> p-תבנית ω. (רציפה C^0)



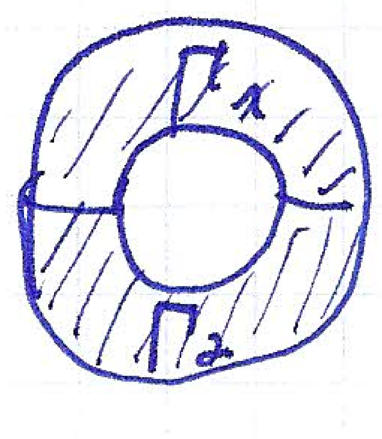
ולכן

$$\int_{B_1+B_2}\omega = \int_B \omega$$

ולכן

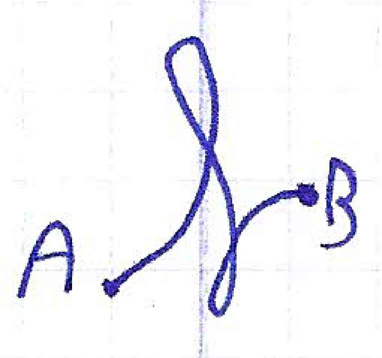
$B_1+B_2 \sim B$ שקולות שרשראות

<u>לגבי שקילות</u> רק שקולות.



$$\Gamma_1+\Gamma_2 \sim \Gamma$$

מסילות הפוכות הן לא 1-שרשראות שקולות.



$$BA + AB \sim 0 \qquad AB \sim -BA$$

$B = \{0\}$ $\quad \mathbb{R}^0 = \{0\}$ $\quad$ מימד 0

$\Gamma_0 : B \to \mathbb{R}^n$

$\Gamma_0(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

מסמן $\Gamma_0 = \{x_0\}$

0-תבנית ב $\mathbb{R}^n$ מחלקה C^m

$\omega(x, h_1, \dots h_k) = \omega(x) \in C^m(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

$\int_{\Gamma} \omega = \omega(x_0) = \int_{\{x_0\}} \omega$

וכעת:

$C = c_1\{x_1\} + \dots + c_p\{x_p\}$

$\int_C \omega = c_1\omega(x_1) + \dots + c_p\omega(x_p)$

$c_1 \sim c_2$ שרשראות שקולות אם $\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$ לכל ω

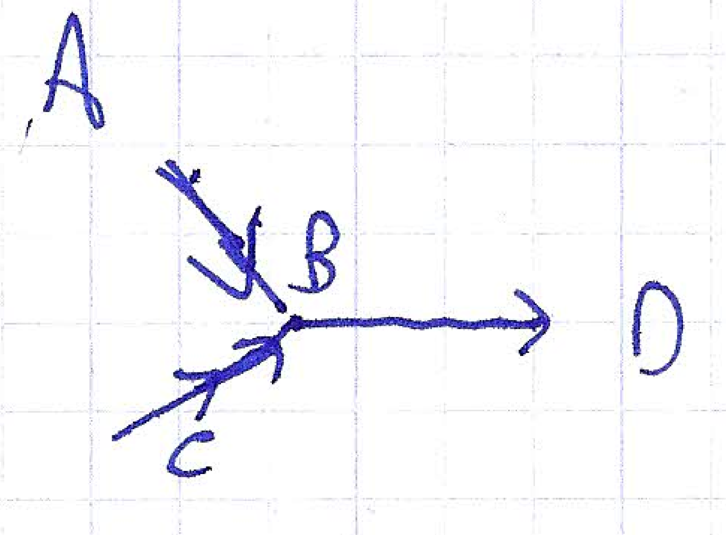
הערה: $c_1 \sim c_2 \Leftarrow c_1 = c_2$

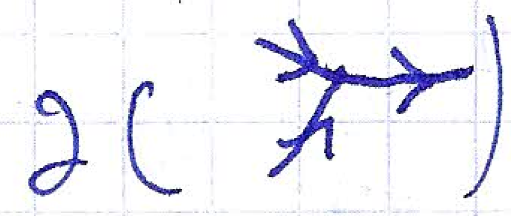
לכל $c_2 - c_1$ 0-שרשראות

הגדרה

השפה של 1-מסילה (מסילה) (ע"י)

$\partial\gamma = \{\gamma(t_1)\} - \{\gamma(t_0)\}$ היא ה 0-שרשרת





השפה מתנהגת "יפה" עם הכלל

אבל!

$\partial(AB + CBD) = B - A + D - C$

$\partial(AB + CB + BD) = B - A + B - C + D - B$

$\partial(CB + ABD) = B - C + D - A$

האם קיים קשר בין שפה של מסילה

לשפה של שרשרת ?

$C \mapsto \partial C$ היא ליניארית

d – 0-תבנית ω_0 חלקה C^1 יש נגזרת

$$(D.\omega_0)_x(h) = (D_h \omega_0)_x = \omega_1(x,h)$$

ω_1 הוא 1-תבנית דיפרנציאלית

נסמן $\omega_1 = d\omega_0$

משפט סטוקס עבור $k=1$

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

לכל 1-שרשרת c ב-$\mathbb{R}^n$

ולכל 0-תבנית חלקה C^1 ב-$\mathbb{R}^n$

בפרט אם $c_1 \sim c_2$

$$\int_{\partial c_1} \omega = \int_{c_1} d\omega = \int_{c_2} d\omega = \int_{\partial c_2} \omega \implies \partial c_1 \sim \partial c_2$$

עד כדי זה שצריך מניח רק ל-ω שהיא C^1 ולא C^0

<u>הוכחה</u>: מספיק מליניאריות להוכיח עבור $\gamma = c$.

כלומר נראה שהנוסחה ש

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

$$\int_\gamma d\omega = \int_{t_0}^{t_1} (d\omega)(\gamma(t), \gamma'(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(D_{\gamma'(t)}\omega\right)_{\gamma(t)} dt =$$

$$\underset{\text{כלל השרשרת}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\omega(\gamma(t))\right) = \omega(\gamma(t_1)) - \omega(\gamma(t_0)) = \int_{\{\gamma(t_1)\}-\{\gamma(t_0)\}} \omega = \int_{\partial\gamma} \omega \quad \blacksquare$$

מסקנה ממקודם, יש לנו

$$\int_{\partial c_1} \omega_0 = \int_{\partial c_2} \omega_0 \quad \forall\, \omega_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

ונרצה

$$\int_{\partial c_1} \omega_0 = \int_{\partial c_2} \omega_0 \quad \forall\, \omega_0 \in C(\mathbb{R})$$ האם נכון?

טענה: לכל $f \in C^0$ יש סדרה $f_i \in C^1$

למה $f \in C(\mathbb{R}^n)$ אזי קיימת $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ כך שבכל

קבוצה חסומה $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ במ"ש.

הוכחה - נראה ל $n=2$.

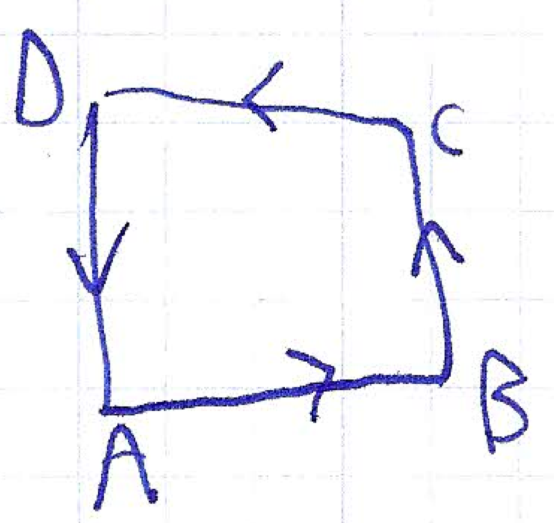
$$f_\varepsilon(x_1,x_2) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{[x_1,x_1+\varepsilon]\times[x_2,x_2+\varepsilon]} f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(x_1,x_2)$$

ובגלל במ"ש שרציפות במ"ש של f

צ"ל $f_\varepsilon \in C^1$ כי

$$(D_1 f_\varepsilon)_{(x_1,x_2)} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} f(x_1+\varepsilon,\cdot) - f(x_1,\cdot)$$

וכן רציף ב x_1 וב- x_2. לכן $f_\varepsilon \in C^1$:



$\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}^n$ לא-רציף, מינימלית (ב-רציף)

$$\partial \Gamma \sim \Gamma|_{AB} + \Gamma|_{BC} + \Gamma|_{CD} + \Gamma|_{DA} \sim$$

$$\sim \Gamma|_{AB} + \Gamma|_{BC} - \Gamma|_{DC} - \Gamma|_{AD}$$

$$\sim \Gamma|_{ABCDA}$$

אין שום בעיה פורמלית~

גם Γ יש כוונה שקולה

כי כל משמעות הפרמטריזציה