תרגול 4 גליון 4

$\int_{*\mathbb{R}^n} f = V_*(X)$ $\quad f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$

<u>טענה</u>

$X=\{(x,t) \mid 0<t<f(x)\}$

$$\int_{*\mathbb{R}^n} f = \sup_{\substack{h\le f \\ \text{מדרגות}}} \int_{\mathbb{R}^n} h$$

אם f חסומה עם תומך חסום אז זה נובע כי $\int_* f = V_*(X)$

ולכן לגבי sup על מדרגות מתחת ל f.

כמו שהגדרנו באינטגרל.

טענה $A_i \uparrow \mathbb{R}^n$ בורל מקומית אז

$$\underbrace{X\cap(A_i\times\mathbb{R})}_{} \uparrow_{i\to\infty} X$$

ולכן משפט ההתכנסות המונוטונית (בורל מקומית ב $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ ולכן גם X)

$$\int_{*A_i} f = V_*(X\cap(A_i\times\mathbb{R}))\uparrow V_*(X)=\int_{*\mathbb{R}^n} f$$

ולכן $\int_{*A_i} f\uparrow\int_{*\mathbb{R}^n} f$

$A_i=[-i,i]^n$ בפרט

ניתן לקחת A_i "כמו" חסומות שואפות ל $\mathbb{R}^n$, ונקבל את

הבעיה עבור f סופית.

אם גם f לא חסומה, ניתן לקחת

$$\underbrace{X\cap(A_i\times(0,i))}_{}\uparrow X$$

בורל מקומית ל X.

ולכן

$$\int_{*A_i} f_i = V_*(X\cap(A_i\times(0,i)))\uparrow V_*(X)=\int_{*\mathbb{R}^n} f$$

ובקיצור אז האינטגרל עבור f ~~כללית~~ כללי.

<u>שאלה לבד</u> מדרגה כלומר מספר <u>סופי</u> של מדרגות. נגדיר חסומה עם תומך חסום.

בפרט - מוכיחים $f_i\ge0$ מדרגה בורל ו- $f_i\uparrow f$ אז

$\int_* f_i\uparrow\int_* f$

הוכחה: אותו $X(f)$ כמו בעבר

מגיע קבוצות עולות.

ראינו דוגמה כי f_i מדרגות גזירות.

למשל: $X_i \subseteq \mathbb{R}$

$$X_i := (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \left\{ \frac{p}{q} : |q| \le i,\ q,p \in \mathbb{Z} \right\}$$

מתקיים $X_i \uparrow \mathbb{R}$ וגם $\forall i \quad V_*(X_i) = 0$

כי $\mathbb{R}\setminus X_i$ צפופה

לכן נגדיר $f_i = \mathbb{1}_{X_i}$, $f_i \uparrow 1 = f$ אבל

$\forall i \quad \int_* f_i = 0$

$$0 = \int_* f_i \uparrow \int_* f = \infty$$ [illegible]

משפט עזר ← תזכורת: תהי $f:\mathbb{R}^{n+m}\to[0,\infty)$ מדידה רציפה אזי

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\,dx\,dy}_{\in[0,\infty]} = \int_{*\mathbb{R}^n} dx \int_{*\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy = \int_{*\mathbb{R}^m} dy \int_{*\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx$$

מסקנה: תהי $G \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ פתוחה אזי

$$V_*(G) = \int_{*\mathbb{R}^n} V_*(G_x)\,dx \qquad G_x = \{y \mid (x,y)\in G\}$$

למה? נעזר ב~~[illegible]~~ (משפט) על $\mathbb{1}_G$,

כיוון ש-G פתוחה ניתן לכתוב כסדרה עולה של מדרגות

רציפות - ואז - פוביני מקרים פשוטים. מדרגות.

מסקנה: תהי $K \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ קומפקטית אזי

$$V^*(K) = \int^*_{\mathbb{R}^n} V^*(K_x)\,dx$$

$\boxed{\text{[illegible]}}$

הוכחה - ניקח תיבות $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ $B_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ כך ש-

$K \subseteq B^o$ כאשר $B = B_1 \times B_2$

$B^o \setminus K$ פתוחה, לכן $V_*(B^o\setminus K) = \int_{*B_1^o} V_*(B_2^o \setminus K_x)\,dx$

נזכיר שראינו כי אם $X \subseteq E$ ו- E גזירה, אזי $V_*(X) + V^*(E\setminus X) = V(E)$

לכן

$$V(B)-V^*(K) = V_*(B^o\setminus K) = \int_{*B_1^o} V_*(B_2^o\setminus K_x)\,dx = \int_* V(B_2) - V^*(K_x)$$

$$v(B)-v^*(K) = \int_{B_1^{o*}} \left(v(B_2) - v^*(K_x)\right)dx = \int_{B_1^o} v(B_2)\,dx - \int^* v^*(K_x)\,dx =$$

$$= v(B) - \int^* v^*(K_x)\,dx$$

אם $f+g$ מדידה אזי

$$\int_* f + \int^* g = \int (f+g)$$

כאן

$f = v(B_2) - v^*(K_x)$

$g = v^*(K_x)$

$f+g = v(B_2)$

בהרצאה הוכחנו

$$v^*(K) = \int^* v^*(K_x)\,dx$$

פונקציות חצי רציפות.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad X = \{(x,t) \mid t<f(x)\}$ אזי

$$X^o = \{(x,t) \; ; \; t < f_*(x)\}$$

$$f_*(x_0) := \liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{|x-x_0|\le\varepsilon} f(x)$$

גבול עליון בסביבת x_0 $\quad \lim_{x\to x_0}$ [illegible]

[illegible]

$f_* \le f \le f^*$

$$f^*(x_0) = \limsup_{x\to x_0} f(x)$$

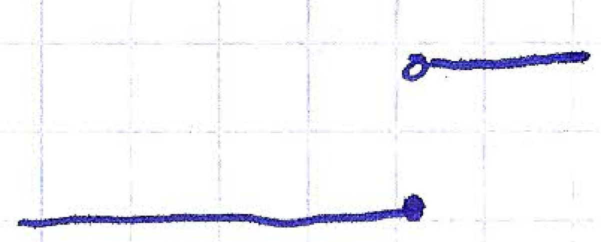
ובדומה

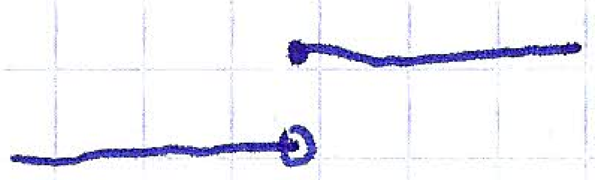
$$Y = \{(x,t) \mid t>f(x)\}$$

$$Y^o = \{(x,t) \mid t > f^*(x)\}$$

דוגמה:

$f = \mathbb{1}_{[0,\infty)}$ $\quad f^* = f$ $\quad f_* = \begin{cases} 0 & x_0=0 \\ f(x_0) & \text{else} \end{cases}$

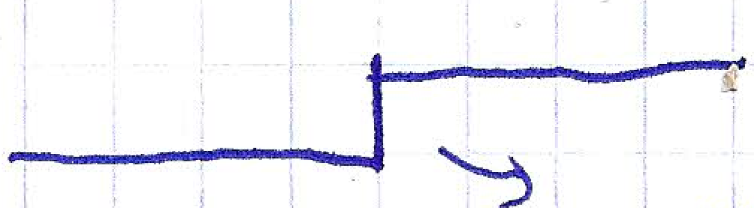




Γ_f יותר גרף של f

[illegible]

$$\Gamma_f = \{(x,t) \mid f_*(x) \le t \le f^*(x)\}$$

$\Gamma_f =$ 

קטע

$\{0\}\times[0,1]$

הקבוצה Γ_f סגורה כי

$$\mathbb{R}^{n+1} = X^o \cup \Gamma_f \cup Y^o$$

ו-

$$\Gamma_f = \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \underbrace{(X^o \cup Y^o)}_{\text{פתוחה}}}_{\text{סגורה}}$$

f_*, f^* מוגדרות היטב

$f_*: \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty)$ $\quad f^*: \mathbb{R}^n \to (-\infty,+\infty]$ שימו לב:

$$osc_f(x) = f^*(x) - f_*(x) \qquad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$\in [0,\infty]$

לכן יכולים להגדיר $\infty-\infty$ לכן אין בעיה להגדיר.

$$osc_f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{x_1,x_2 \\ |x_1-x|\le\varepsilon \\ |x_2-x|\le\varepsilon}} |f(x_1)-f(x_2)|$$

f רציפה ב x_0 $\iff$ $osc_f(x_0)=0$

<u>משפט</u> לכל פונקציה חסומה f במלבן $\mathbb{R}^n\supseteq B$ ~~[illegible]~~
התנאים הבאים שקולים:

א) f אינטגרבילית

ב) $\int^*_B osc_f = 0$

ג) לכל $\varepsilon>0$ $v^*\{x\in B\ ;\ osc_f(x)\ge\varepsilon\}=0$

<u>טענה</u> f חסומה במלבן B אז

$$\int^*_B osc f = \int^*_B f^* - \int_{*B} f_*$$

<u>למה</u> לכל $G_1,G_2\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות זרות זו לזו מתקיים

$$v_*(G_1\uplus G_2) = v_*(G_1) + v_*(G_2)$$

<u>הוכחה</u> - ניקח רשת פיקסלים, הפיקסלים ~~[illegible]~~ הפנימיים שנמצאים גם
שלה מלא, וכל פיקסל הוא פנימי קטיבה, לכן לפי הגדרה
של א' של G_1 ושל G_2 כי אם נוסיף נקודות הקיצוניות הפנימיות
(הנפח מודד) לכתוב מתקדמות, לכן יש שוויון.

הוכחה <u>הטענה</u> - נניח. $\sup_B|f| < M$ נגדיר:

$$X = \{(x,t) \mid x\in B \quad -M<t<f(x)\} \qquad Y = \{(x,t) \mid x\in B \quad f(x)<t<M\}$$

$$\Gamma_f \cap (B^\circ\times\mathbb{R}) = \Gamma = \{(x,t) \quad x\in B^\circ \quad f_*(x)\le t\le f^*(x)\}$$

$$X^\circ = \{(x,t) \mid x\in B^\circ \quad -M<t<f_*(x)\} \qquad Y^\circ = \{(x,t) \mid x\in B^\circ \quad f^*(x)<t<M\}$$

$$B^\circ\times(-M,M) = X^\circ \uplus \Gamma \uplus Y^\circ$$

נניח כי $B^0 \times (-M, M)$ מנוגד. X^0, Y^0 מנוגדות

$\Gamma' = \Gamma_f \cap (B \times \mathbb{R})$ סגורה. ולכן $\underbrace{(B \setminus B^0) \times (-M,M)}_{\text{מידה 0. ג'ורדן}} \supseteq (\Gamma' \Delta \Gamma)$

ולכן

$$2M \cdot v(B) = v_*(X^0) + v^*(\Gamma) + v_*(Y^0) =$$

$v(E) = v_*(X) + v^*(E \setminus X)$ ← ג'ורדן $E \supseteq X$ אם כל אחד

~~[illegible]~~

לכן מספיק על הקבוצות ו-פנימיות (v_* של הפנימיות)

מספיק כדי לנו לפונקציה כל ג'ורדן אי-שלילית

③ $v^*(\Gamma) = \int_B^* osc f$

② $v_*(X^0) = \int_{*B} (f + M) = \int_{*B} f + M \cdot v(B)$

① $v_*(Y^0) = M v(B) - \int_B^* f$ ← 3 (כלומר $\int_*$)

($v_*(X) = v_*(X^0)$ על פי תכונות ...)

אז נוכיח את ①,②,③

כפתרון:

$$v^*(\Gamma) = v^*(\Gamma_f \cap (B \times \mathbb{R})) \underset{\substack{\text{חשב על} \\ \text{(פוביני)}}}{=} \int_B^* v^*\big(\underbrace{[f_*(x), f^*(x)]}_{\text{כי הבדל של הקבוצה הזו}}\big) = \int_B^* osc_f(x)\,dx \quad ③$$

$$\int_{B*} (f + M) = \int_{*B} f + \int_B M = \int_{*B} f + M v(B) \quad ①$$

האדיטיביות של $\int^*$ ו- $\int_*$ עבור f ו-g אינטגרביליות. M כי אינטגרבילית.

$$\int_*(f + M) = v_*(\{(x,t) \mid x \in B,\ 0 < t < f(x) + M\}) =$$

$$= v_*(\{(x,t) \mid x \in B,\ -M < t - M < f(x)\}) =$$

אינוריאנטיות של נפח בהזזה $s = t - M$

$$= v_*(\{(x, s) \mid x \in B,\ -M < s < f(x)\}) =$$

$$= v_*(X^0)$$

$\blacksquare$ ג'ורדן כל מגזר X ≤ ? נוכיח Y 2

משפט תהי פונקציה f חסומה B ג'ורדן TFAE:

1) $\int_B^* |f| = 0$ | 2) $0 = v^*\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$

הוכחה ללמה: א ⇐ ב

$A_\varepsilon = \{x \mid |f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$

נשים לב $\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon} \leq |f|$

ולכן $\varepsilon V^*(A_\varepsilon) = \int^* \varepsilon \mathbb{1}_{A_\varepsilon} \leq \int^* |f| = 0$

ב ⇐ א

נשים לב שA_ε ממדה 0 (לכל ε)

$\int^*_B |f| = \int^*_{B \setminus A_\varepsilon} |f| \leq \varepsilon V(B)$

A_ε ממדה 0, לכן אין תרומה לאינטגרל.

לכן $\forall \varepsilon > 0 \quad \int^*_B |f| \leq \varepsilon V(B)$

ולכן $\int^*_B |f| = 0$.

הגדרת (משפט)

מובלעת נוגע ⇔ ב'. מובלעת נוגע ב' ⇔ ג'

תיקון לפרק 9

תרגיל 11
תרגיל 12

מספיק ג'ורדן של $f+g$ נובע מהמסקנה ג'ורדן של f ושל g.

תרגיל 11: $f,g \geq 0$. f מדידה ג'ורדן ⇔ $\forall i \; f_i$ מדידה ג'ורדן.

כי תומך של $R^n \times [0,i]$ שומר על ג'ורדן מקומית.

$(f+g)_i \leq (f_i+g_i)_i$

$f,g \geq 0$

לכן - f_i ו- g_i חסומים בעל תומך ג'ורדן, $(f+g)_i$ חסום בעל תומך ג'ורדן,

לכן $f+g$ מדידה ג'ורדן

משפט

תרגיל 12 $f,g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מדידות אז $f+g$ מדידה.

הגדרה: f מדידה ג'ורדן ⇔ $\forall B \, \forall i \quad \int^*_B osc_{f_i} = 0$

$f_i = mid(-i, f, i)$

g חסומה ב B ⇔ $\int^*_B osc_g = 0$ הוכחנו בכיתה

טענה: $osc_{f_i} \uparrow osc_f$ כאשר $i \to \infty$

$f_i^* \uparrow f^*$ $(f_i)_* \downarrow f_*$ הוכחנו עם

טענה: $osc_{f+g} \leq osc_f + osc_g$

$(f+g)^* \leq f^* + g^*$ כי זה limsup

$(f+g)_* \geq f_* + g_*$ כי זה liminf

תרגיל B תיבה $\varepsilon>0$.

$$X = \{x\in B \mid osc_{f+g}(x) \geq 2\varepsilon\}$$

$$Y_i = \{x \in B \mid osc_{f_i}(x) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

$$Z_i = \{x \in B : osc_{g_i}(x) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

הסבר: $osc_{f+g} \leq osc_f + osc_g$

לכן אחת מהן גדולה מ-ε.

וכיוון ש $osc_{f_i} \uparrow osc_f$

יש i המתאים לה גדול מ $\frac{\varepsilon}{2}$

אזי

$$X \subseteq \bigcup_i (Y_i \cup Z_i)$$

$v_*(F_i) \uparrow v_*(F)$

תרגיל E_i, F_i יורדת, עולה.

$E_i \downarrow E \quad F_i \uparrow F \quad E \subseteq F$

$v(E_i) = \underbrace{v_*(E_i \setminus E)}_{\text{יורד לאפס}} + v^*(E)$

אזי $\lim_i v(E_i) \leq \lim_i v(F_i)$

הסבר: $\lim(v(E_i) - v(F_i)) \leq$
$\leq \lim v(E_i \setminus F_i) = 0$
$E_i \setminus F_i \downarrow \phi$

מסקנה

מסקנה אם $F=E$, לכל קבוצה כזו הגבול של ירידה, העליה

$F_i \uparrow F$ וK קומפקטית $K \subseteq F$

אזי $v^*(K) \leq \lim_i v(F_i)$ כי מספר סופי של קבוצות פתוחות מכסה את K.

[מיצג פתוח $\{osc_h \geq \varepsilon\}$]

כיוון ש X סגורה וחסומה, היא קומפקטית.

ולכן מספר סופי מהן מכסות.

אזי

$$v^*(X) \leq \lim_i v^*\left(\bigcup_{l=1}^{i} (Y_l \cup Z_l)\right) = \lim_i 0 = 0$$

המשפט מסקנה

נקבל X מידה 0 לכל ε, לכן $f+g$ אינטגרבילית.

מדידות לפי מידה לבג

$m_*(X) = \sup v^*(K)$ קומפקטית $K \subseteq X$

$m^*(X) = \inf_{G \supseteq X} v_*(G)$ פתוחה

$\parallel$

$\inf_{G \supseteq X} \sup_{E \subseteq G} v(E)$

$\downarrow$

לפי "כיוון" שנבנה רגיל

לכל תת קבוצה סגורה חסומה

"כל" כזו

X מדידה לבג

$\Leftrightarrow$

$\forall r \quad m_*(X_r) = m^*(X_r)$

$X_r = \{x \in X \mid |x| \leq r\}$

$m(X) = \lim_{r\to\infty} m_*^*(X_r)$

ועבור כל X_r אז גבול כמוהו

כי $\infty = m_*(X) = m^*(X)$

ולכן לכל X סגור לא מדידה

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא מדידה לבג אמ״מ

$\{(x,t);\ t<f(x)\}$ היא מדידה. לבג

$$\int f = m\{(x,t)\mid 0<t<f(x)\} - m\{(x,t)\mid f(x)<t<0\}$$

E_i מדידה לבג $\leftarrow$ $\bigcup_i E_i$ מדידה לבג

$\mathbb{R}\setminus E$ גם מדידה. אזי E מדידה.

כל קבוצה פתוחה מדידה לבג, כל סגורה גם כן

$m(G)=v_*(G)$ $m(K)=v^*(K)$

G פתוחה   K (קומפקט).

f אינטגרבילית רימן אמ״מ היא רציפה כמעט בכל מקום.

<u>כמה מעניין</u>: לא צריך לפתח שום טענה ש-$f+g$ מדידה לבג אם f ו-g מדידות לבג.

<u>פרק 20</u>

פונקציות נקודה ← פונקציות קבוצה. זה כמו מעבר מאינטגרציה מספרית לפונקציות מסלול.

מכונית נוסעת - $t\mapsto\gamma(t)$ $\gamma:[t_0,t]\to\mathbb{R}^n$ לכל זמן יש לה מהירות.

כמה דלק היא צורכת? [פרופורציונלי למהירות, שהיא הנגזרת]..

(אם כי לא פרופורציונלי)

תלוי ב- $F(t)$ כמה היא צורכת

ו- $v(t)=|\gamma'(t)|$ (מהירות)

צריכה = (הצריכה) היא $\int_{t_0}^{t_1}F(t)v(t)\,dt$

$F(t)=c_2\cdot v^2(t)+c_1v(t)+c_0$

במקרה כללי $\int_{t_0}^{t_1}\langle F(t),\gamma'(t)\rangle\,dt$

$$\frac{1}{2}m|\gamma'(t_1)|^2-\frac{1}{2}m|\gamma'(t_0)|^2=\int_{t_0}^{t_1}\overset{\text{עבודה}}{<F_\gamma(t),\gamma'(t)>}\,dt$$

כי מקיים אם $m\gamma''(t)=F_\gamma(t)$ [חוק שני של ניוטון]

[מתכלים ב $\gamma(t)$ ובזמנים אינסופית לפני t]

עכשיו על פעולה

יש פונקציה מעל $\Omega(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}\quad dt$ כמו $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ פונקציה מסילה.

$\Omega(\gamma|_{[t_0,t]})+\Omega(\gamma|_{t,t_1})=\Omega(\gamma)$ אדיטיבית

$\Omega(\gamma(\cdot-s))=\Omega(\gamma)$ אינה "מזדקנת" – אוטונומית

$t\longmapsto\gamma(t-s)$

$\gamma(\cdot-s):[t_0+s,t_1+s]\to\mathbb{R}^n$

$\gamma_{-1}:[0,t_1]\to\mathbb{R}^n$

$\gamma_{-1}(t)=\gamma(t_1-t)$

$\Omega(\gamma_{-1})=\Omega(\gamma)$ סימטרי

$\Omega(\gamma_{-1})=-\Omega(\gamma)$ אנטי סימטרית

$$\Omega(\gamma)=\underbrace{\frac{\Omega(\gamma)+\Omega(\gamma_{-1})}{2}}_{\text{סימטרית}}+\underbrace{\frac{\Omega(\gamma)-\Omega(\gamma_{-1})}{2}}_{\text{אנטי סימטרית}}$$

$\gamma(\cdot)=const\to\Omega(\gamma)=0$

$\Omega(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}|\gamma'(t)|dt$ דוגמה

$\Omega(\gamma\circ\varphi)=\Omega(\gamma)$ שאינו תלוי

$\varphi:[s_0,s_1]\to[t_0,t_1]$ דיפאומורפיזם עולה

<u>כללי</u>

$\Omega:\gamma\longmapsto\int_{t_0}^{t_1}F(t,\gamma(t),\gamma'(t))dt$

$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה

(10 מה צריך שמסלול ~~[illegible]~~ יקיים ~~[illegible]~~ שפונקציה f. אם כנראה f?