תרגול 4

~~ה~~רצאה 3

טענה $A_i \uparrow A$ וכולן ג'ורדן מקומית ב-$\mathbb{R}^n$ אז מתקיים

f אינט' על A

$$\int_{A_i} f \xrightarrow{i\to\infty} \int_A f$$

הוכחה של המשפט ההתכנסות המונוטונית לפונקציות רציפות

המשפט לקומפקטים ואותה הוכחה עובדת שימוש דומה

של קומפקטיות, אין משהו של קומפקטיות לפונקציה

לכן חשוב ספציפי אינט' על נפח לכן עובד.

למשל - $X \subseteq Y$, A ג'ורדן מקומית ב-Y אזי A ג'ורדן מקומית ב-X - לכן מתוך המשפט שלנו על $A_i \uparrow X$

ג'ורדן ב-X מקומית

← $V_*(A_i) \uparrow V_*(X)$ גם משפטית. A_i, A ג'ורדן מקומית ב-$\mathbb{R}^n$

ולכן במקרה דומה A_i ג'ורדן מקומית ב-A.

$$\mathrm{mid}(-i,f,i) = f_i(x) = \begin{cases} -i & f(x)\le -i \\ f(x) & -i \le f(x) \le i \\ i & i \le f(x) \end{cases}$$

וגם $\int_{A_i} f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_A f$ כי טפל V_* של ~~...~~

מש"ל

טענה $f,g:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ אינטגרביליות אז $f+g$ אינט'

$$\int(f+g) = \int f + \int g$$

<u>f ו-g לא בהכרח חסומות</u>

<u>הוכחה</u> מספיק להראות לכל E ג'ורדן $\int_E f+\int_E g = \int_E (f+g)$

$f_i+g_i \le (f+g)_{2i}$ עם ה-2 ...

$$\int_E f_i + \int_E g_i = \int_E (f_i+g_i) \le \int_E (f+g)_{2i}$$

אז $\int_E f + \int_E g \le \int_E (f+g)$

$(f+g)_i \le f_i+g_i \to \int_E (f+g)_i \le \int_E f_i + \int_E g_i$ משפט המונוטוניות [illegible]

ולכן $\int_E f+g \le \int_E f + \int_E g$

ולכן זה נכון לכל E פשוטה, לכן מתקיים ע"י $\sup$.

משפט $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות אז $f+g$ אינטגרבילית ו- $\int (f+g) = \int f + \int g$

הוכחה [נראה תחילה ש $f+g$ אינטגרבילית]

$$\int (f+g) = \int \max((f+g),0) - \int \max(-f-g,0)$$

$$\max(f+g,0) \le \max(f,0) + \max(g,0)$$

$$\int \max(f+g,0) \le \int \max(f,0) + \int \max(g,0)$$

ולכן $0 > \int \max((f+g),0)$

ובאותו אופן

$\infty > \int \max((-f-g),0)$

לכן [illegible] אינטגרבילית

$$(f+g) = \max(f+g,0) - \max(-f-g,0) = \underbrace{\max(f,0)-\max(-f,0)}_{f} + \underbrace{\max(g,0)-\max(-g,0)}_{g}$$

$$\int \max((f+g),0) + \int \max(-f,0) + \int \max(-g,0) =$$

$$= \int \max((-g-f),0) + \int \max(f,0) + \int \max(g,0)$$

וכעת מעבירים אגפים ומקבלים את התכונה הלינארית:

$$\int f+g = \int f + \int g$$

הערה - $\int cf = c\int f$ - [illegible] c - [illegible]

[illegible] + ~~[illegible]~~ של כל פונקציה, לכן של פונקציה מדידה

כי $V_*(X) = \sup_{E\subseteq X} V(E)$

כל הגדרה של אינטגרל של פונקציה.

הגדרה: תהי ג'ורדן מדידה ב- $X\subseteq\mathbb{R}^n$.

$f:X\to\mathbb{R}$ חסומה. אז

הקבוצה $\{(x,t)\mid x\in X,\ t<f(x)\}\subseteq X\times\mathbb{R}$

היא ג'ורדן מקומית ב- $X\times\mathbb{R}$

$$\int_X f = V_*\{(x,t)\mid x\in X,\ 0<t<f(x)\} - V_*\{(x,t)\mid x\in X,\ -f(x)<t<0\}$$

ו- $\int_X f$ שווה ל- $\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\mathbb{1}_X$

אם A ג'ורדן מקומית אזי $\int_A f$ כאינטגרל רימן שווה ל- $\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathbb{1}_A$

זו דרך להוכיח כלל, אדיטיביות נותנת לנו

$$V_*(Y)+V_*(X)=\int_X 1+\int_Y 1 \overset{?}{=} \int_{X\uplus Y} 1 = V_*(X\uplus Y)$$

אבל לא הוכחנו נכון.

<u>החלפת משתנים באינטגרל לפי ג'ורדן</u>

<u>טענה</u>: יהי $\varphi:U\to V$ דיפאומורפיזם בין $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות.

אם $A\subseteq U$ אז A ג'ורדן מקומית ב- U אם"ם

$\varphi(A)$ ג'ורדן מקומית ב- V.

<u>למה</u>: אם E_i קבוצה ג'ורדן ב- $\mathbb{R}^n$ ו- X חסומה ב- $\mathbb{R}^n$

ו- $V^*(X\triangle E_i)\xrightarrow[i\to\infty]{}0$ אז X ג'ורדן.

<u>הכללה</u>: נכון באופן כללי יותר:

אם $\int^*|f-f_i|\xrightarrow[i\to\infty]{}0$ ו- f_i אינט'

אז f אינט'.

למה: $f=\mathbb{1}_X$, $f_i=\mathbb{1}_{E_i}$

ונקבל את הלמה.

<u>למה</u>: נניח ש- $X\subseteq\mathbb{R}^n$, $A_i\uparrow X$, A_i ג'ורדן מקומית ב- X.

אז $B\subseteq X$ היא ג'ורדן מקומית ב- X אם"ם

לכל i $B\cap A_i$ היא ג'ורדן מקומית ב- A_i

ואם כן אז $V_*(A_i\cap B)\uparrow V_*(B)$

הוכחה: תהי $E \subseteq X$ מדידה.

צ"ל $$\nu^*\left((E\cap A_i\cap B)\,\Delta\,(E\cap B)\right)\to 0$$

נסמן $F_i = E\setminus A_i$

אזי $F_i \downarrow \emptyset$, $\nu_*(F_i)\downarrow 0$

בנוסף $E\setminus A_i = E\setminus(A_i\cap E)$ מדידה כי A_i מדידה מקומית ב-X

ולכן F_i מדידה.

לכן $\nu(F_i)\downarrow 0$

ולכן

$$\nu^*\left((E\cap A_i\cap B)\,\Delta\,(E\cap B)\right)\le \nu^*(F_i)=\nu(F_i)\to 0$$

מסקנה - אם $M\subseteq h$ פתוחה ו- $A\subseteq M$ אז

A היא מדידה מקומית ב-M אם ורק אם $A\cap E$ מדידה לכל $E\subseteq M$ מדידה שמוכלת בתת קבוצה קומפקטית של M.

הוכחה - לכל M פתוחה קיימות $A_i\subseteq M$, $A_i\uparrow A$, A_i מדידות

מוכלות בתת קבוצה קומפקטית של M

למשל יש ... מרחק גדול מ-$\frac{1}{2^n}$ ... לכן יש ...

וכל ... לכל M כי היא פתוחה. ובנוסף.

~~תהי A מדידה מקומית~~

הגדרה הערה על העתקה ... שמשמרות ... -

תהי A מדידה מקומית ב-M. האם $\varphi(A)$ מדידה מקומית ב-V?

תהי $F\subseteq V$ מדידה שמוכלת בתת-קומפקט של V

אז $\varphi^{-1}(F)$ מדידה שמוכלת בקומפקט ב-M (מהמשפט)

ממשפט 3. כדי ש- $A\cap\varphi^{-1}(F)$ היא מדידה,

לכן $\varphi(A\cap\varphi^{-1}(F))=\varphi(A)\cap F$ מדידה. (לפי ... מהמשפט ממשפט 3)

הערה: ... כי φ^{-1} ...

__משפט__ תהי $\varphi: \mathcal{U} \to V$ דיפאומורפיזם בין קבוצות פתוחות

$\mathcal{U}, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $f: V \to \mathbb{R}$ אזי f אינטגרבילית ב-V אמ"מ

$f \circ \varphi$ אינטגרבילית ב-$\mathcal{U}$ ואם כן אז $\int_V f = \int_{\mathcal{U}} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|$

(שוויון במובן הרחב של: מוגדר = מוגדר, $+\infty = +\infty$, $-\infty = -\infty$

ו- $\infty - \infty = \infty - \infty$)

__הוכחה__

$\varphi \times id : \mathcal{U}\times\mathbb{R} \to V\times\mathbb{R}$

$(x,t) \mapsto (\varphi(x), t)$ הינו דיפאומורפיזם.

$$D(\varphi \times id) = \left(\begin{array}{c|c} D\varphi & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

הוא דיפאומורפיזם

בין התחום מתחת לגרף של $f\circ\varphi$ לתחום

מתחת לגרף של f ולכן ז'ורדניות מקומית

מה שאומר: של ... ו... יקיים, לכן מוגדר של f אינטגרבילי ⟵

מוגדר של $f\circ\varphi$

כעת נוכיח את שוויון האינטגרלים -

נשים לב - $\max(f,0)\circ\varphi = \max(f\circ\varphi, 0)$

לכן מספיק להוכיח את השוויון לפונקציה אי-שלילית וגם

$\left\{\int f = \int \max(f,0) - \max(-f,0)\right\}$

$f: V \to [0,\infty)$ $\quad f_i = \min\{f, i\}$

$E_i \subseteq \mathcal{U}$ קבוצות ג'ורדן $E_i \uparrow \mathcal{U}$ ו- E_i מיצוי קומפקטי של $\mathcal{U}$.

$F_i = \varphi(E_i)$ מיצוי קומפקטי ב-V. $F_i \uparrow V$ F_i ג'ורדן.

$\int_{F_i} f_i \uparrow_{i\to\infty} \int_V f$

$\int_{E_i} (f_i\circ\varphi)\,|\det D\varphi| \uparrow_{i\to\infty} \int_{\mathcal{U}} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|$

וגם $\int_{F_i} f_i \underset{\downarrow}{=} \int_{E_i} f_i\circ\varphi\,|\det D\varphi|$

משפט מהרצאה 3

$\int_V f = \int_{\mathcal{U}} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|$ מש"ל

התכנסות מונוטונית של אינטגרל

למה

תהי $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ פונקציה חסומה עם תומך קומפקטי

אז

$$\int_{*\mathbb{R}^n} f = V_*\left(\{(x,t) : 0<t<f(x)\}\right)$$

הוכחה

$V_*(\{(x,t)|0<t<f\}) \geq V(E_-) = L(f,P)$ מתקיים

$E_- = \bigcup_{C\subseteq P} C\times[0,\inf_C f)$ כאשר

לכן אם ניקח sup על כל חלוקות של התחום נקבל.

$$\int_* f \le V_*\left(\{(x,t) \mid 0<t<f(x)\}\right)$$ עבור כיוון

כדי להוכיח $\geq$ מספיק להראות $V(E)\le \int_{*\mathbb{R}^n} f$ לכל $E\subseteq\{(x,t) \mid 0<t<f(x)\}$ קבוצה ג'ורדן. לפי משפט פוביני –

$$\int \mathbb{1}_E(x,t)\,dt \le f(x)$$

ולכן

$$V(E) = \int_{*\mathbb{R}^n} dx \int \mathbb{1}_E(x,t)\,dt \le \int_{*\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

$*$ תחתון לכל x

כנדרש

הגדרה

עבור $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ **נגדיר**

$$\int_{*\mathbb{R}^n} f = V_*\left(\{(x,t) \mid 0<t<f(x)\}\right)$$

משפט

יהיו $X\subseteq\mathbb{R}^n$, $f_i\uparrow f: X\to[0,\infty)$ מונוטונית $f_i : X\to[0,\infty)$

ג'ורדן ו- אזי $\int_X f_i \uparrow \int_X f$

לכן עבור $X=\mathbb{R}^n$ מקבלים משפט התכנסות "רגיל".

הוכחה

$A=\{(x,t) \mid 0<t<f(x)\}$, $A_i=\{(x,t) \mid 0<t<f_i(x)\}$

$A_i\uparrow A$ $(\subseteq X\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^{n+1})$ A_i ג'ורדן מוכלות ב $X\times\mathbb{R}$

$V_*(A_i)\uparrow V_*(A)$ $\leftarrow$ התכנסות מונוטונית של נפחים

טענה: לכל $f:\mathbb{R}^{m+n}\to[0,\infty)$

$$\int_{*\mathbb{R}^{m+n}} f \le \int_{*\mathbb{R}^n}\left(x\mapsto \int_{*\mathbb{R}^m} f_x\right)$$

[$\int_* f = \sup \int h$, $h\le f$ מדרגות — * טענה קצת מעניינת כללי]

הוכחה: מהטענה הקודמת –

מספיק להוכיח ש $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} h \le \int^{e}_{\mathbb{R}^n}\left(x\mapsto \int_{\mathbb{R}^m} h_x\right)$ לכל $h\le f$ מדרגות

$$\int h = \int_{\mathbb{R}^n}\left(x\mapsto \int_{\mathbb{R}^m} h^x\right) \le \int_*\left(x\mapsto \int_{*\mathbb{R}^m} h^x\right) \le \int_*\left(x\mapsto \int_* f^x\right) \quad \blacksquare$$

בכיוון כללי אין שוויון

דוגמה: ~~~ תהי Z קבוצה צפופה ב-$\mathbb{R}^2$ שחיתוכה עם ישר –

כך שכל ישר אנכי או אופקי חותך אותה לכל היותר $Z\cap$

$f=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2\setminus Z}$

$\int_* f = 0$ כי $\int h \doteq 0$ $\forall h\le f$ מדרגות

אבל לכל x יש לכל היותר ~~~ נקודה אחת ב-Z

לכן $\int_* f^x = 1$

דוגמה ל-Z כזו –

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{matrix} x+\sqrt{2}y\in\mathbb{Q} \\ \sqrt{2}x+y\in\mathbb{Q}\end{matrix}\right\}$$

משפט: יהיו $f_i, f:\mathbb{R}^{n+m}\to[0,\infty)$

$f_i\uparrow f$, f_i מדרגות אינטגרביליות לכל i אזי

$$\int_{*\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{*\mathbb{R}^n}\left(x\mapsto \int_{*\mathbb{R}^m} f_x\right)$$

הרעיון: מספיק לטפל "לגבי" כל ~~~ גבול מונוטוני של מדרגות.

למשל, כל אינטגרבילית היא גבול של...

משפט: $X\subseteq\mathbb{R}^m$, $f_i:X\to[0,\infty)$, $f_i\downarrow 0$, $\int_{*X} f_1<\infty$

אזי $\int_* f_i\downarrow 0$

[כמו במידה: אם $A_i\downarrow\emptyset$ אזי $V^*(A_i)\downarrow 0$

תרגיל

לכל $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ חסומות עם תומך חסום. $\int_* f+g \le \int_* f + \int^* g$

(הוכחה: [illegible] סופרמום של [illegible] $f+g$ [illegible] $=$ [illegible] $\le$)

משפט $f_i \uparrow f$ אז $\int_{*\mathbb{R}^n} f \le \lim_{i\to\infty} \int^*_{\mathbb{R}^n} f_i$

כאשר f_i חסומות עם תומך חסום.

(יש טעות דומה (אינטגרל עליון))

(אינטגרל תחתון)

הוכחת המשפט

נגדיר $0\le g_i \uparrow f$ חסומות עם תומך חסום, אינטגרביליות

$g_i = \min(f_i, i)\cdot \mathbb{1}_{B_i}$ כאשר B_i כדורים כך ש $B_i\uparrow\mathbb{R}^n$.

משפט [illegible] יש לנו $\int_{*\mathbb{R}^{m+n}} f \le \int_{*\mathbb{R}^n}\left(x\to\int_{*\mathbb{R}^m} f_x\right)$ [illegible] $\ge$.

$$\int_*\left(x\to\int_* f_x\right) = \int_* dx \int_* dy\, \underbrace{f(x,y)}_{\lim_{i\to\infty} g_i(x,y)}$$

$$\int_* dy \lim_{i\to\infty} g_i(x,y) \le \underbrace{\lim_{i\to\infty}\int^* dy\, g_i(x,y)}$$

לפי [illegible] המשפט הקודם [illegible]

כי הפונקציה אינטגרבילית

$$\int_*\left(x\to\int_* f_x\right) = \int_* dx \int_* dy\, f(x,y) \le \int_* dx \lim_{i\to\infty}\int^* dy\, g_i(x,y) = (*)$$

לכן

יש לנו (*) ~~[illegible]~~ כמו [illegible] של אינטגרל [illegible] משפט התכנסות

מונוטונית [illegible] של [illegible] גבול של [illegible] [illegible]

(*) $\lim_{i\to\infty}\int dx \int^* dy\, (g_i(x,y)) = \cancel{\int dx}$

$$= \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{m+n}} g_i(x,y) \le \int_{*\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)$$

$g_i \le f$

(*) $h_i := \int^* dy\,(g_i(x,y))$

[illegible] הן [illegible] של g_i.

לכן $\lim\int h_i = \int \lim h_i$

ממשפט ההתכנסות המונוטונית