

(מקדים)
(3,1,1)
(2,2,1)
(2,1,2)
(1,3,1)
(1,2,2)
(1,1,3)

R^n is a vector space over R with basis L_1, L_2 and L_3

$$L_1 \cap L_2 = L_3$$

$$L_1 \cap L_2 (h_1, h_2) = L_1(h_1) \cap L_2(h_2) = L_3(h_1, h_2)$$

R^n is a vector space over R with basis L_1, L_2, L_3

R^n is a vector space over R with basis L_1, L_2, L_3

$$L^{(3)} = L^{(2)} \cap L^{(1)} = L^{(1)} \cap L^{(2)}$$

$$L^{(3)}(h_1, h_2, h_3) = L^{(1)}(h_1) \cap L^{(2)}(h_2, h_3) + L^{(2)}(h_2) \cap L^{(1)}(h_1, h_3) + L^{(1)}(h_1) \cap L^{(2)}(h_2, h_3)$$

h_1, h_2, h_3 are vectors in R^n

$$L(h_1, h_2, h_3) = \sum_{i,j,k} c_{i,j,k} (h_1)_i (h_2)_j (h_3)_k$$

$$c_{i,j,k} = L(e_i, e_j, e_k)$$

$c_{i,j,k}$ are scalars

$$L(h_1, h_2, h_3) = \sum_{i,j,k} c_{i,j,k} \begin{vmatrix} (h_1)_i & (h_2)_j & (h_3)_k \\ (h_1)_j & (h_2)_i & (h_3)_k \\ (h_1)_k & (h_2)_i & (h_3)_j \end{vmatrix}$$



$$L_{i,j,k}(h_1, h_2, h_3)$$

$$L_{i,j}(h_1, h_2) = \begin{vmatrix} (h_1)_i & (h_2)_j \\ (h_1)_j & (h_2)_i \end{vmatrix}$$

$$L_i \cap L_{j,k} = L_{i,j,k}$$

$$L_{i,j,k} = L_i \cap (L_j \cap L_k) = (L_i \cap L_j) \cap L_k = L_k \cap L_{i,j} = L_{k,i,j} = L_{i,j,k}$$

$L_1 \cap L_2 \cap L_3$

$(w_1 \wedge w_2)(x) = w_1(x) \wedge w_2(x)$
 $(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 = w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3)$
 $(f_1 w_1) \wedge (f_2 w_2) = (f_1 f_2) w_1 \wedge w_2$
 $w_2 \wedge w_1 = - w_1 \wedge w_2$
 $w_1 \wedge w_1 = 0$

$dx_i \wedge dx_j = L_{ij}$
 $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = L_{ijk}$

$$D_w(h_1, h_2, h_3) = D_{h_1} w(\cdot, h_2, h_3) + D_{h_2} w(\cdot, h_3, h_1) + D_{h_3} w(\cdot, h_1, h_2)$$

$d(f \wedge w) = df \wedge w + f \cdot dw$
 $d(f \wedge g) = df \wedge g + f \cdot dg$

$d(f \wedge w) = df \wedge w + f \cdot dw$
 $d(f \wedge w) = df \wedge w$
 $d(f \wedge dx_i \wedge dx_j) = df \wedge dx_i \wedge dx_j$

$w = \sum_{i < j} f_{ij} (dx_i \wedge dx_j)$
 $dw = \sum_{i < j} df_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j$

Pullback

$\psi: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\psi^*(w_1 \wedge w_2 \wedge w_3) = \psi^* w_1 \wedge \psi^* w_2 \wedge \psi^* w_3$

$\psi^*(dw) = d(\psi^* w)$

$\psi^* w$
 $\psi^* w$
 $\psi^* w$

$\omega = f_{ij} dx_i \wedge dx_j$
 נוסח כללי
 של פורמ
 של פורמ

$$\omega = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

$$\varphi^* (d(f_{ij} dx_i \wedge dx_j)) = d \varphi^* (f_{ij} dx_i \wedge dx_j)$$

$$g_{ij} = \varphi^* (f_{ij}) = f_{ij} \circ \varphi$$

$$y_i = \varphi^* x_i = x_i \circ \varphi \quad y_j = \varphi^* x_j = x_j \circ \varphi$$

המשוואה הבאה היא זהה לזו של קודם

$$\varphi^* (d(f_{ij} dx_i \wedge dx_j)) = \varphi^* (df_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j) = \varphi^* df_{ij} \wedge \varphi^* dx_i \wedge \varphi^* dx_j =$$

$$= d \varphi^* (f_{ij}) \wedge d \varphi^* x_i \wedge d \varphi^* x_j = \boxed{dg_{ij} \wedge dy_i \wedge dy_j}$$

נוסח כללי
 של פורמ
 של פורמ

$$d(\varphi^* (f_{ij} dx_i \wedge dx_j)) = d(g_{ij} \varphi^* dx_i \wedge \varphi^* dx_j) =$$

$$= d(g_{ij} \cdot d(\varphi^* x_i) \wedge d(\varphi^* x_j)) = dg_{ij} \wedge dy_i \wedge dy_j$$

המשוואה הבאה היא זהה לזו של קודם

$$C^1 \text{ map } R^n \rightarrow R^m, \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

המשוואה הבאה היא זהה לזו של קודם

$$\int_M d\omega = \int_M \varphi^* (d\omega) = \int_M \varphi^* (d\omega)$$

$$\int_M d\varphi^* \omega = \int_M \varphi^* (d\omega) = \int_M \varphi^* (d\omega)$$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

$$\omega = f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3$$

$$\omega = f_{12} (dx_1 \wedge dx_2) + \dots$$

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \dots$$

$$D_1 f + D_2 f dx_2 + D_3 f dx_3$$

$$\int_B \omega = \int_B D_3 f \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_B D_3 f \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 D_3 f \, dx_1 \wedge dx_2 =$$

$\underbrace{\int_B D_3 f \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}_{\text{flow of } \omega}$
 $\downarrow$
 $\int_0^1$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (f(x_1, x_2, 1) - f(x_1, x_2, 0)) \, dx_1 \wedge dx_2$$

$$\int_B \omega = \int_0^1 \int_0^1 dx_1 \wedge dx_2 (f(x_1, x_2, 1) - f(x_1, x_2, 0))$$

$\int_B \omega = \int_0^1 \int_0^1 dx_1 \wedge dx_2 (f(x_1, x_2, 1) - f(x_1, x_2, 0))$
 or $\int_0^1 \int_0^1 dx_1 \wedge dx_2 (f(x_1, x_2, 1) - f(x_1, x_2, 0))$

or $\int_0^1 \int_0^1 dx_1 \wedge dx_2 (f(x_1, x_2, 1) - f(x_1, x_2, 0))$

$$C_1 \sim C_2 \Rightarrow \partial C_1 \sim \partial C_2$$

$$\int (\omega_1 \wedge \omega_2) = (\int \omega_1) \wedge (\int \omega_2) - \omega_1 \wedge (\int \omega_2)$$

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto H \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \omega$$

$$\omega(x, y, z) = \det(H(x), h_1, h_2)$$

$$\omega = f_{12} \, dx_1 \wedge dx_2 + f_{23} \, dx_2 \wedge dx_3 + f_{31} \, dx_3 \wedge dx_1$$

$$\omega(x, h_1, h_2) = f_{12} L_{1,2}(h_1, h_2) + f_{23} L_{2,3}(h_1, h_2) + f_{31} L_{3,1}(h_1, h_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_{12} & f_{23} & f_{31} \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H & h_1 & h_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$H_1 = f_{2,3}$$

$$H_2 = f_{3,1} = -f_{1,3}$$

$$H_3 = f_{1,2}$$

$$\omega = H_1 \, dx_1 \wedge dx_2 + H_2 \, dx_2 \wedge dx_3 + H_3 \, dx_3 \wedge dx_1$$

$$d\omega = dH_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dH_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dH_3 \wedge dx_3 \wedge dx_1$$

$$= \underbrace{D_1 H_1 \, dx_1 + D_2 H_2 \, dx_2 + D_3 H_3 \, dx_3}_{\text{div } H}$$

$$= D_1 H_1 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + D_2 H_2 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + D_3 H_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 =$$

$$= \text{div } H \cdot (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$$

or $\text{div } H \cdot (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$

or $\text{div } H \cdot (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$

or $\text{div } H \cdot (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$

שם הספר: הספר

$$\int_{\partial B_R} F = R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \cdot R^2 \sin \theta \, f(R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

רצוננו לשלב את שני האינטגרלים

$$\int_{\partial B_R} F = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \cdot R^2 \sin \theta \, f(\dots)$$

$$\int_{\partial B_R} 1 = 4\pi R^2$$

השטח של כדור

הקושי הוא שיש לנו

$$\frac{\int_{\partial B_R} F}{4\pi R^2}$$

$$\frac{\int_{\partial B_R} F}{4\pi R^2}$$

$$\int_0^R dr = \int_{\partial B_r} f = \int_{B_r} f$$

$$\int_{\partial B_r} f = \frac{d}{dr} \int_{B_r} f$$

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f \quad f \in C^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

$$\operatorname{div}(fH) = f \operatorname{div} H + \langle \nabla f, H \rangle \Rightarrow \operatorname{div}(f \nabla g) = f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

$$\Rightarrow f \Delta g - g \Delta f = \operatorname{div}(f \nabla g - g \nabla f)$$

$$\int_{\partial \Omega} u \nabla v = \int_{\Omega} u \Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle$$

המשפט של גרין

המשפט של גרין

$$\int_{\partial \Omega} (u \nabla v - v \nabla u) = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u)$$

$$\Gamma_{R_1, R_2}$$

המשפט של גרין

המשפט של גרין



$$\partial \Gamma_{R_1, R_2} = \partial \Gamma_{R_2} - \partial \Gamma_{R_1}$$

המשפט של גרין

$$\int_{\partial \Gamma_R} (u \nabla v - v \nabla u)$$

המשפט של גרין

המשפט של גרין

המשפט של גרין

$$V(z) = \frac{1}{|z|} \quad (7)$$

$$\int_{\partial \Gamma_R} u \nabla v = - \frac{1}{R^2} \int_{\partial B_R} u$$

$$\int_{\partial \Gamma_R} v \nabla u = \frac{1}{R} \int_{\partial B_R} \nabla u$$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} u(x + \cdot)$$

$$u(0) = \frac{\int_{\partial B_R} u}{4\pi R^2}$$

$u \in \text{Harm}(G)$ קד' u נגזרת $G \subset \mathbb{R}^3$

המשפט המקסימום/מינימום

$$\exists x_0 \in G \text{ s.t. } \sup_G u = u(x_0) \Rightarrow u \equiv \text{const}$$

וה

למשפט זה גרסה נוספת - u חצייה u חצייה

אם u חצייה u חצייה u חצייה

אם u חצייה u חצייה u חצייה

אם u חצייה u חצייה u חצייה

$u = \text{const}$ $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$

$$u(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{B_R^x} u(x + \cdot) \leq \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{B_R(y)} u(y + \cdot) =$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi (R+|x-y|)^3} \int_{B_{R+|x-y|}} u(y + \cdot) \cdot \left(\frac{R+|x-y|}{R} \right)^3$$

$u(x) \leq u(y)$ $R \rightarrow \infty$ R u