תרגול 4 דף 1

ג. רכטמן

זו תבנית מדויקת כי ω_2 שכן $\omega_2 = d\omega_1$ עבור תבנית ω_1.

שאין להגדיר ממנה פונקציה לוקלית.

כי לא משנה מאיפה מתחיל מסלול, מקיף את הראשית, שלו שקולה לסגורה ○ (ובכך השונות) של ה ∂ תבנית עליו

נכון, למה? כי היא מדויקת ולכן סגורה.

איך נקבל תבנית סגורה שאינה אינטגרבילית?

דוגמא נכונה: פונקציית θ - זווית, ו-היא לא רציפה, מוגדרת...

זו תבנית מדויקת ω היא $\omega = d\alpha$. ~~[illegible]~~

אולם $d(\alpha + df) = d\alpha = \omega$

~~[illegible]~~ כי אם תבנית מוגדרת פונקציה, פונקציה שונה ממנה פונקציה לוקלית, אבל היא מוגדרת פונקציה לוקלית, עד כדי ~~[illegible]~~ פונקציה מסוג שמתאפסת רק על הנגזרת, כלומר df עבור f שהיא קבועה.

נניח שיש γ_1, γ_2 המסלולים ו- ω היא 1 תבנית סגורה

אז
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

כאשר נתון אבל ש $\omega = d\alpha = 0$ אבל ש ω ו $\underline{\text{לא}}$ קבוע

אבל אז נקבל ש
$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = \underline{\text{קבוע}}$$

אם γ המסלול ל 0 כלומר של המסלול

אז $\int_\gamma \alpha - 0 = $ קבוע כלומר $d\alpha$ מוגדרת פונקציה לוקלית.

אם G פשוט קשר, כל γ היא של המסלול אז $\omega = d\alpha$ קיימת ~~[illegible]~~ פונקציה גלובלית.

אם $d\alpha = d\beta$ אזי $\alpha - \beta$ סגורה. (האם היא מדויקת?)

דוגמא: אם $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ אזי לא נכון קודם.

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

$d\alpha = 0 = w$ סגורה α אבל לא מדויקת.

אבל w לא מדויקת גלובלית, נכון מקומית.

נניח $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^{4} U_i$ נסמן

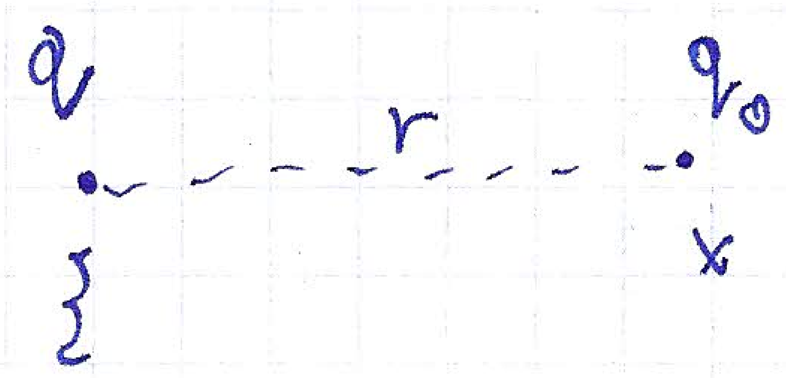
$$G_1 = (U_1 \cup U_2)$$
$$G_2 = (U_3 \cup U_4)$$

אזי G_i הם פשוטי קשר.

$w|_{G_1}, w|_{G_2}$ מדויקת. אבל $w|_{G_1 \cup G_2}$ לא מדויקת.

<u>אלקטרוסטטיקה</u>

<u>כח חשמלי</u>



$$F = \frac{1}{4\pi \cdot w_0} \frac{(\overrightarrow{x-\xi})}{\underbrace{|x-\xi|}_{r}} \frac{q_0 q}{r^2} = q_0 E(x)$$

$$E(x) = \frac{1}{4\pi w_0} \frac{q}{r^2} \frac{x-\xi}{\underbrace{|x-\xi|}_{r}}$$

$$= \frac{q}{w_0} E_\xi(x); \quad E_\xi(x) = E(x-\xi) = = -\frac{1}{4\pi} \nabla u(x-\xi)$$

$$u(x) = \frac{1}{|x|}$$

$$\rho(x) = \mathbb{1}_{|x|<R} = \begin{cases} 1 & |x|<R \text{ (בפנים)} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$u(x) = \int \frac{d\xi}{|x-\xi|} = \begin{cases} \frac{4\pi R^3}{3|x|} & \|x\| \geq R \\ \frac{2\pi}{3}(3R^2 - |x|^2) & |x| \leq R \end{cases}$$

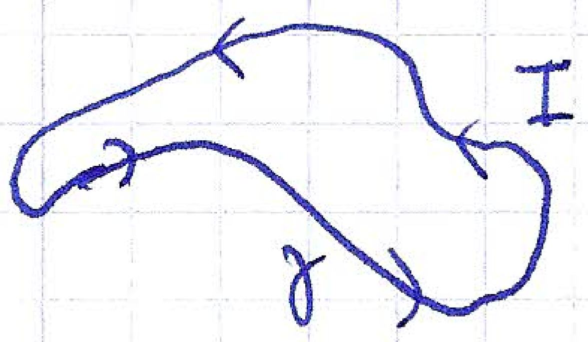
$$\underbrace{\operatorname{div} \nabla u(x)}_{\Delta u} = \begin{cases} -4\pi & |x|<R \\ 0 & |x|>R \end{cases} = -4\pi \rho(x)$$

יש [illegible] ״[illegible]״ [illegible], [illegible] של ריכוז מטען.

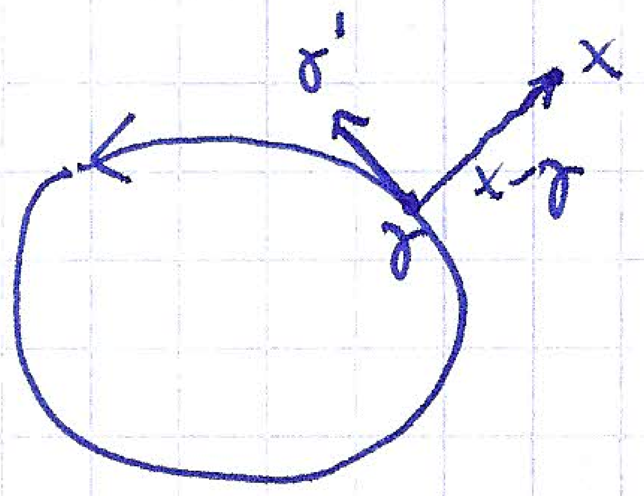
ביוט ראשוני

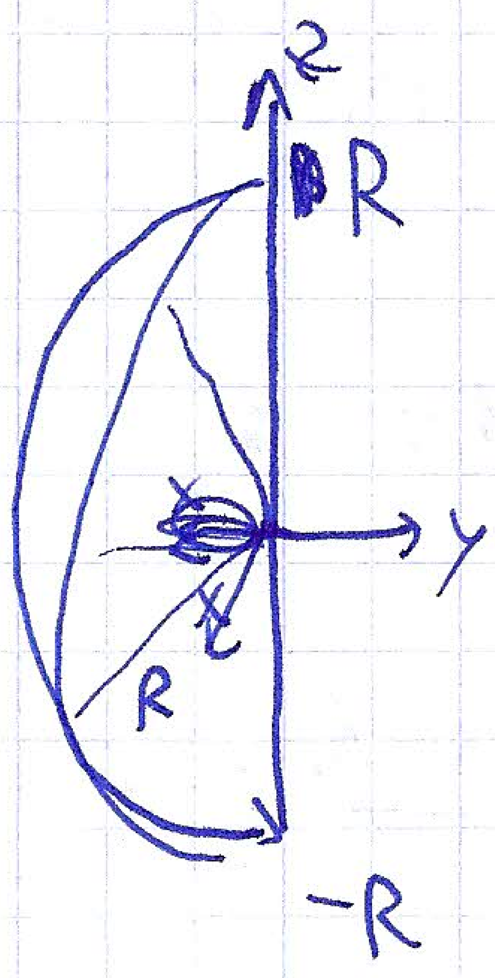
תיאור שדה מ' לחוטים.

יש זרם I. יוצר שדה מגנטי



$$B(x) = \mu_0 \cdot I \cdot \underbrace{B_\gamma(x)}_{\text{תלוי בצורה של } \gamma} \longrightarrow B_\gamma(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\gamma'(t) \times (x-\gamma(t))}{|x-\gamma(t)|^3}\, dt$$





$$\lim_{R\to\infty} B_{\gamma_R} =$$

על מה! הוא! מצביע?

עבור! מה המשמעות

של Superman

$$B_{\gamma_R} \to B_{\gamma_\infty}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\cdot w \longleftrightarrow fE$$

$$d \qquad\qquad \text{rot} = \text{curl}$$

$$d(fw) \longleftrightarrow \boxed{\ }$$

$$\text{rot}(fE) = f\,\text{rot}\,E + \nabla f \times E$$

$$d(f\,w) = f\,dw + df \wedge dw$$

מה נובע מזה?

כמו שראינו פה

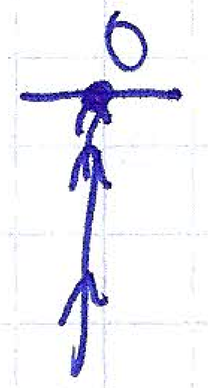
$$\frac{1}{4\pi}\Big(\underbrace{1 - \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{f}\Big)\underbrace{\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)}_{E}$$

$$\text{curl}\, B_{\gamma_{-\infty,0}}(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3}$$

זהו נקודה

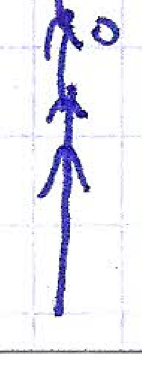
rot של זרם שווה ל 0 בנקודות שאין בהן זרם

לנקודה לא קשור.



שווה ל 0.

נניח זרם קטע



זהו כמו $B(x,y,z-\varepsilon)$

עבור

ולכן אם נגדיר γ מ 0 ל ε נקבל

$$B(x,y,z-\varepsilon)-B(x,y,z)=-\frac{\partial}{\partial z}B(x,y,z)\varepsilon+o(\varepsilon)$$

גזירת השרשרת

$$\operatorname{rot}(\quad)=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3}\right)\varepsilon=-D_3E_0(x)\cdot\varepsilon$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\gamma'(t)\times(x-\gamma(t))}{|(\quad)|^3}dt$$

למסלול כלל
מה פרט ל-

$$\int_0^{\varepsilon}\dots=\frac{\gamma'(t)\times X}{|X|^3}\varepsilon+o(\varepsilon)$$

רציפה.

לכן ה rot הוא

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\gamma'(t)\times x}{|x|^3}\right)=-D_3E_0(x)$$

ולא סתם כי סכום של הרבה כאלה אינפיניטסימליים שלפעמים יש רווח.
אבל הרוטור הוא הנגזרה. לכן בפשטות בכל הכיוונים
של הנגזרת שווה 0.

לכן $\operatorname{rot}_x\left(\frac{(0,0,1)\times x}{|x|^3}\right)=-D_{(0,0,1)}E_0(x)$ ולכן (משפט סימטריה והצגות מחליפות.)

$$\operatorname{rot}_x\left(\frac{h\times x}{|x|^3}\right)=-D_hE_0(x)$$

כי פונקציה של הגזירה בלינאריות
אבל הגדרת איך לבדוק אינטגרל? ~~[illegible]~~ אך לפעמים דיפרנציאביליות

~~[illegible]~~ אבל בפועל אינטגרל לא ~~[illegible]~~ נשמרת תחת דיפרנציאביליות
כשכן

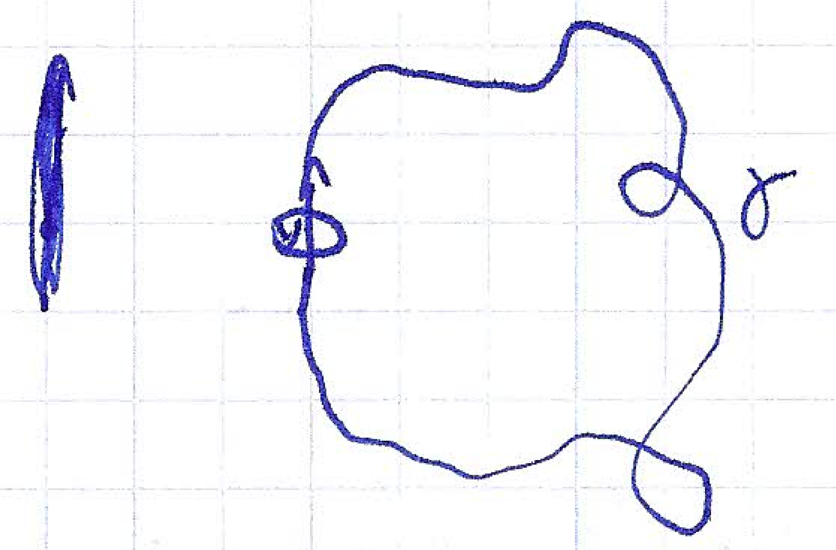
אבל הפונקציה $w \Leftrightarrow E$ היא רציפה, ועם מה שנשאר
לנו המשמעות של השימור של כל הנגזרת - לכן ממשיך לרציפות.

rot של (וקטור)
כי מקיים של
rot י

$$\operatorname{rot}\cdot\left(\int_{t_0}^{t_1}\frac{\gamma'(t)\times(x-\gamma(t))}{|\ast|^3}\right)=\int D_{\gamma'(t)}E_0(x-\gamma(t))dt=$$

$$=\int\frac{d}{dt}E_0(x-\gamma(t))=0$$

נניח $\gamma(0)=0$ $\gamma'(0)=(0,0,1)$ אז



אז הגרעין של הדיפרנציאל (של פונק' גאוס) של הגאוס
הוא ממש מישור לעקומה הנתונה
נניח 1.

$$\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\det\left(\gamma_1'(s),\ \gamma_2'(t),\ \gamma_1(s)-\gamma_2(t)\right)}{|\gamma_1(s)-\gamma_2(t)|^3}\,ds\,dt$$

למה $\det$? כי מכפלה פנימית של וקטור עם מכפלה
וקטורית לפי מה שראינו זה $\det$.

כל. מס' הסיבובים של γ_1 סביב γ_2 סימטרי.
זה של γ_2 סביב γ_1 נקרא מספר קשר.

קשר של
אזי הגרעין של ... שמחזיר את ... <u>הגדרה טובה</u> ... (מספר ...)
~~מספר~~
מספיק גם אין יותר מזה, את ... הסיבוב.
אפשר כי ... וכן מספיק כל ש... מס' הסיבובים ...
? ... של ... ?
[illegible]

... בין אלגברה ... ו ... -
... 3-ממדית (...)

$B, E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\in C^1$.
זמן

$\mathrm{div}\, E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ צפיפות מטען.

$\mathrm{div}\, B = 0$

$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\cancel{\mathrm{curl}}\ \mathrm{rot}\, B = \mu_0 j + \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{1/c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$

צפיפות הזרם.

יש 6 פונקציות $2\times \mathrm{div}$, $2\times \mathrm{curl}$ ρ, j

כי 6 כי $3+3=6$ 2 שדות וקטוריים

אולם $\binom{4}{2}$ 13 תבניות ... 2-... .

כי 2-תבניות של dx, dy, dz, dt

$dx\wedge dy,\ dx\wedge dz,\ \dots,\ dz\wedge dt$.

איך פותרים זה ללא כל הרבה? כמעט מכל 4 משוואות למרחב

(תלות בזמן?) כוריות לנו רק שתי משוואות מקסוול פשוט

מה לגבי האחרות ($\mathrm{div}\, B = 0$ $\quad \mathrm{curl}\, E = \frac{-\partial B}{\partial t}$)?

כן!

$$\omega = (E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3) \wedge dt + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$$

B מגנטי חשמלי

~~פוטנציאל~~ לא יחיד עד הנגזרת

$$A : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\omega = dA$$

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i dx_i + A_0 dt$$

$$\omega = dA = \underbrace{\frac{\partial A_1}{\partial t} dt \wedge dx_1 + \frac{\partial A_0}{\partial x_1} dx_1 \wedge dt}_{} + \dots$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t}\right)}_{E_1} dx_1 \wedge dt$$

$$E_k = D_k A_0 - D_0 A_k$$

$$B_1 = D_2 A_3 - D_3 A_2$$

$$B_2 = D_3 A_1 - D_1 A_3$$

$$B_3 = D_1 A_2 - D_2 A_1$$

כמו מתאפסת $\mathrm{div} B$

$$\mathrm{div} B = D_1 B_1 + D_2 B_2 + D_3 B_3 = D_1 D_2 A_3 - D_2 D_1 A_3 + (\quad) + (\quad) = 0$$

למשל גל

$$A = A_2(x_1 - ct)\, dx_2 + A_3(x_1 - ct)\, dx_3$$

אז

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ c A_2'(x_1 - ct) \\ c A_3'(x_1 - ct) \end{pmatrix}$$

מאונך לו B

$\mathrm{div} E = 0$ נכון.

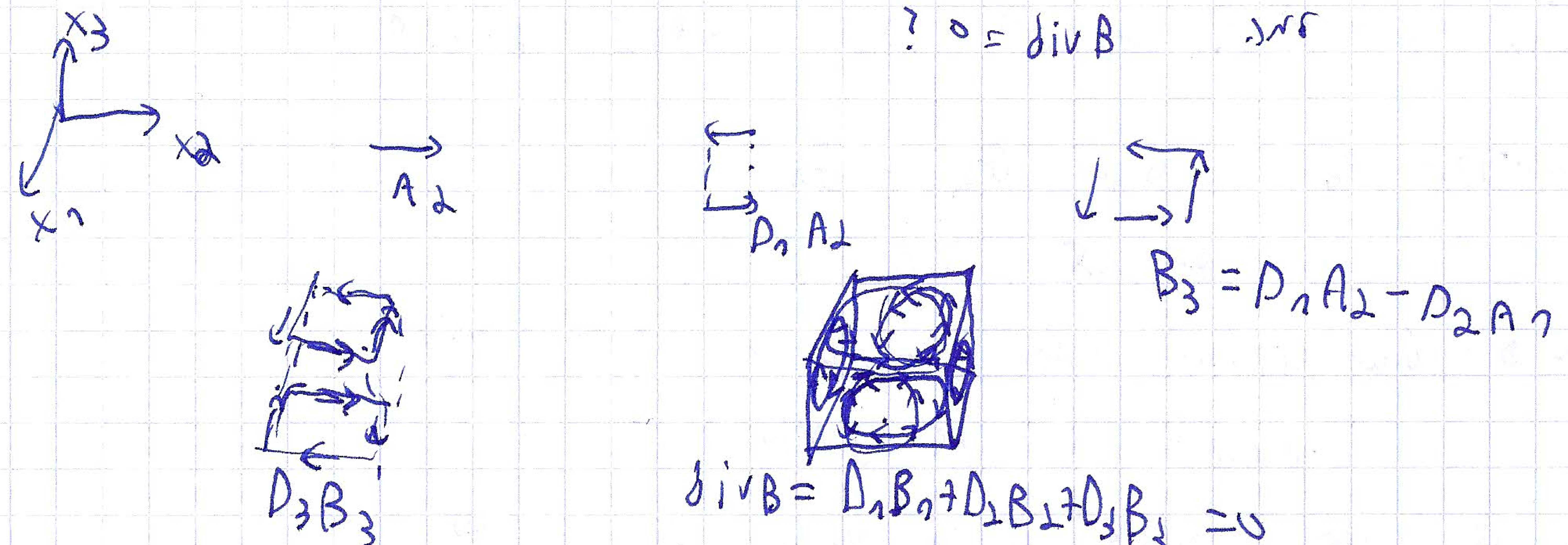
$$\mathrm{curl}\, B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

כך לגבי

מקבלים מהירות, שמה את מתקבלת גלים מהירות?

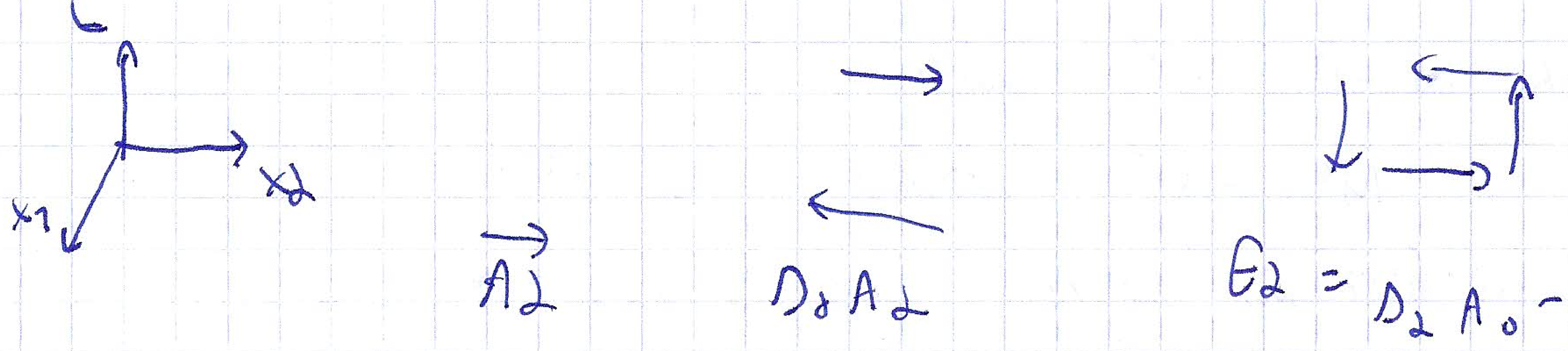
(c = מהירות האור)

למה $\operatorname{div} B = 0$?

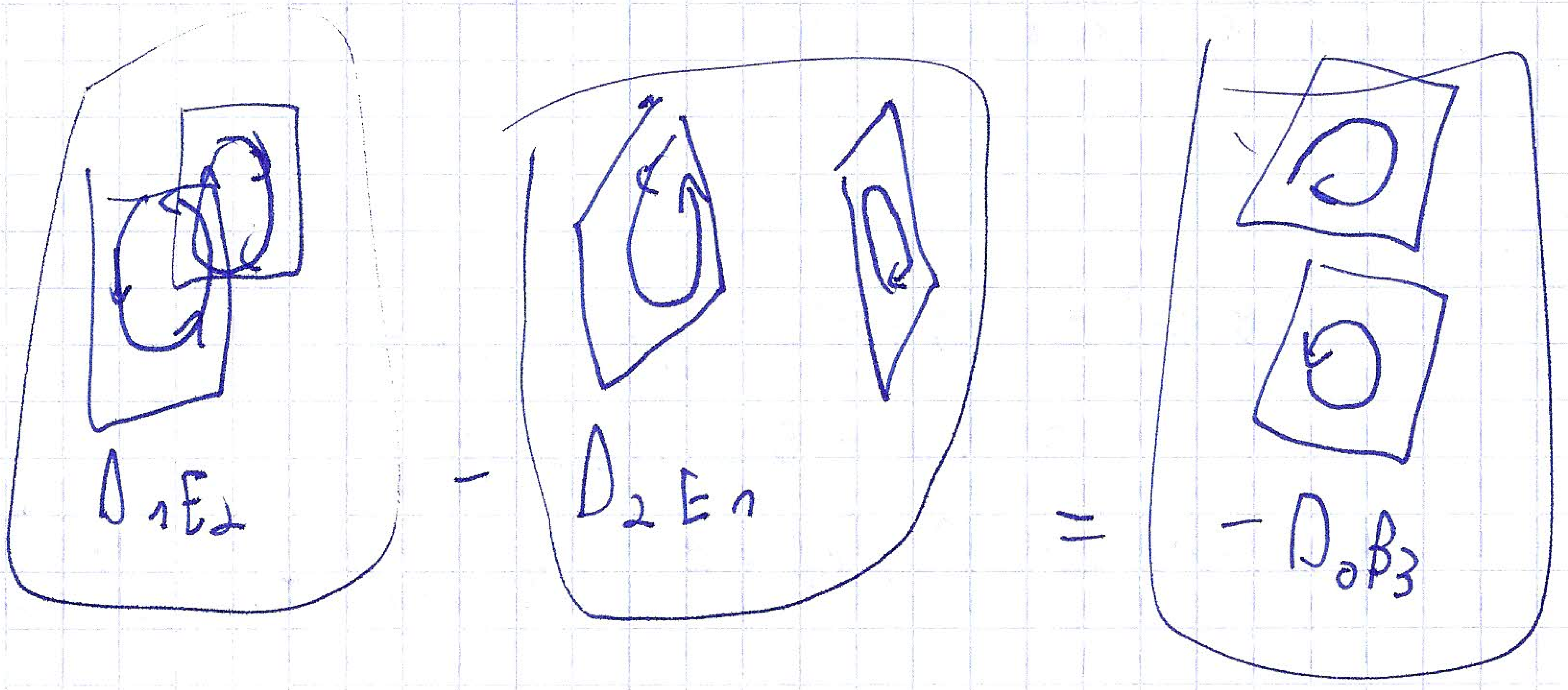


$B_3 = D_1 A_2 - D_2 A_1$

$\operatorname{div} B = D_1 B_1 + D_2 B_2 + D_3 B_3 = 0$



$E_2 = D_2 A_0 - D_0 A_2$



$D_1 E_2 - D_2 E_1 = -D_0 B_3$

לכן

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

לכן אין לפוטנציאל A אין לו שום משמעות כי ניתן
להוסיף לו גרדיינט של פונקציה ו-רוטור של גרדיינט של כל סקלר
הוא 0 תמיד.

בקיצור E, B, ω תלויים $\{A + df : f \in C^?\}$

הכל אותו פיזיקלית בעצם.

4 גרסאות
שקולות
לאותו
אובייקט פיזיקלי.

E, B

ω

$\{A + df : f \in C\}$

פוטנציאל פיזיקלי.

ולמעשה שקול בין גוף פיזיקלי לגבי $\{A + df\}$ שהם שקולים לשדה.

כי שדות אלו - את מה שיכול להיות רלוונטי פיזיקלית.
בגין זה את התנהגות במרחב ובשדה.

אולם אפשר לדבר פונקציות לינאריות על תמונות לא פשוטות יותר
וכולי

G_1 - G_2 גורם ω_0 מוגדר יותר.

אולם גבולות לא מוגדרת

כמות שכן φ < G_1 G_2 השוואה (קונטרקציה/שוויון) θ אלף

לכל 0 < סימטריה של תמונות.

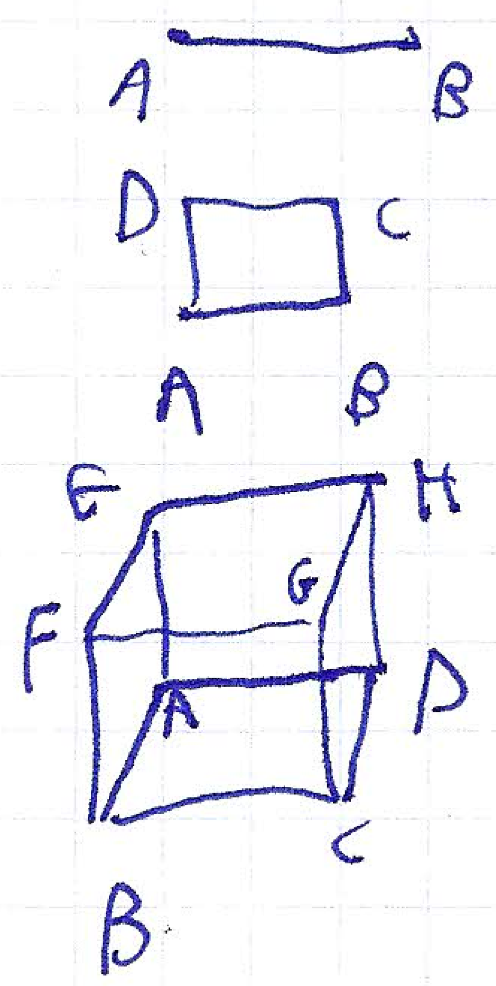
אם השלב מוגדר ק' פונ' לינארית ~~[illegible]~~ קבוצות מכן

כמו ק' תנאי ω. מה לא יכול להיות

לפי קה הקוטביות סגירה שלו - כמו מגוון ש. אלגברי
מושגי

צריך לעשות את התנאי ודרגה הטופולוגית משלה הכל פשוט יותר

אולם לפיכך הקונוס פתוחה יש פונק' לו.



$$\partial(ABCD) = AB + BC + CD + DA =$$
$$= AB + BC - DC - AD$$
$$\partial(\text{קובייה}) = ADCB + FGHE + BFGC + \overset{AEHD}{\cancel{ADHE}}$$
$$+ \dots$$

מהו תנאי מספיק לגבי $d\omega_2$ עבור ω_2 כללי לגמרי

ק' תנאי

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\partial \Gamma_\varepsilon} \omega$$

$$\Gamma_\varepsilon : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^n \qquad \Gamma_\varepsilon(u_1,u_2,u_3) = x_0 + \varepsilon u_1 h_1 + \varepsilon u_2 h_2 + \varepsilon u_3 h_3$$

$$= \underbrace{D_{h_1}\omega(\cdot,h_2,h_3)_x + D_{h_2}\omega(\cdot,h_3,h_1)_x + D_{h_3}\omega(\cdot,h_1,h_2)_x}$$

$d\omega_2 =$ (הגדרה)