

מרחבים וקטוריים -

האינטואיציה מאחורי דטרמיננטות שטפים רוטור והיקום

שטף של שדה וקטורי דרך משטח -

כאשר $H: R^3 \rightarrow R^3$ שדה וקטורי, ו $\Gamma: B \rightarrow R^3$ היא 2-תיבה סינגולרית, אז השטף של H דרך Γ מוגדר להיות האינטגרל:

מה האינטואיציה מאחורי ההגדרה הזו? בואו נסתכל על H כעל שדה המהירויות של נוזל, כלומר, בהנתן נקודה H מחזיר את וקטור המהירות של הנוזל באותה נקודה (אם היה שם כדור קטן, לאיזה כיוון ובאיזו מהירות הנוזל היה סוחף את הכדור).

השטף של השדה דרך משטח כלשהו, יהיה כמות הנוזל שעוברת דרך המשטח ביחידת זמן.

נסתכל על התרשים הבא:

נניח ש a ו- b הם וקטורי הנגזרות

של Γ , ו- H מהירות הנוזל בנקודה זו.

נטען שהשטף של H , פרופורציוני לנפח

המקבילון הנפרש על ידי שלושת הוקטורים

האלה. למה? כי שטח הבסיס, הוא למעשה

השטח שהמשטח Γ 'ממלא' בסביבה קטנה של

הנקודה u . ו- H זה כיוון הזרימה של הנוזל, והמהירות שלו.

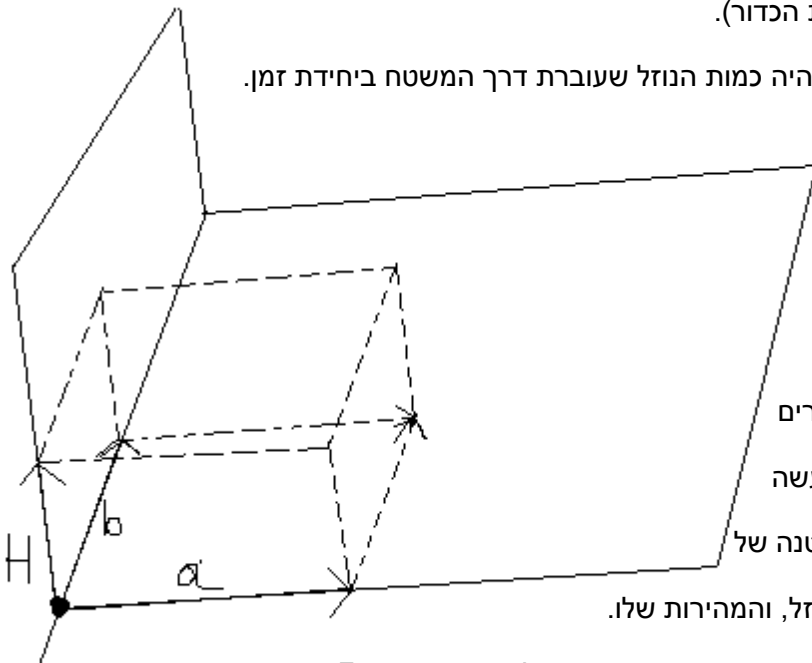
הנפח הזה לכן, מתאר את כמות הנוזל שעוברת ביחידה קטנה של שטח סביב $\Gamma(u)$.

וכידוע (בדקו!) דטרמיננטה של n וקטורים היא הנפח ה- n מימדי של המקבילון הנפרש על ידם.

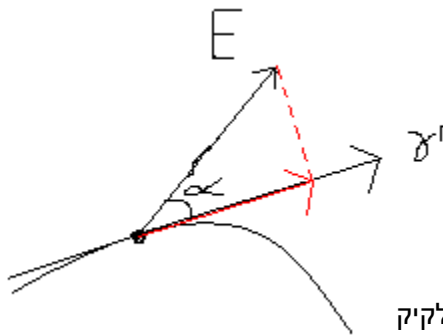
אינטגרל של שדה וקטורי לאורך מסילה:

כאשר $E: R^3 \rightarrow R^3$ שדה וקטורי, ו $\gamma: [a, b] \rightarrow R^3$ היא מסילה חלקה, אז האינטגרל של E לאורך γ מוגדר להיות האינטגרל:

האינטואיציה מאחורי ההגדרה הזו, היא עבודה של כח על עצם נע - נניח יש לנו עצם שזז במרחב, נניח אלקטרון. לאלקטרון יש מטען, לכן מושפע משדה כח חשמלי, נסתכל על E כעל שדה הכח,



כלומר, בכל נקודה הוקטור ש E מחזיר בנקודה זו הוא הכח (גודל וכיוון) החשמלי שיפעל על האלקטרון. γ הוא מסלול התנועה של האלקטרון.



וכעת נסתכל על התרשים:

על המכפלה הסקאלארית אפשר לחשוב בתור מדד לתאימות של שני וקטורים, כמה הם 'הולכים באותו כיוון'. לכן, המכפלה

הסקאלארית בין המהירות (הנגזרת של γ) לבין הכח, תיתן לנו את

העבודה של הכח על החלקיק, כמה פעולת הכח תרמה לתנועת החלקיק

(וכמה היא הפריעה לה). אפשר לראות זאת בצורה ברורה בנוסחה למכפלה הסקאלארית בנורמה האוקלידית - $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\alpha)$ כאשר α היא הזווית בין שני הוקטורים. כמו בתרשים, אפשר לראות שזה מכפלת הגודל של הוקטור האחד, בהיטל (באדום) של הוקטור האחר עליו, לכן זה מדד לתאימות שלהם.

תרגיל 12a1 – יש שתי חד תבניות, שהשדות הוקטורים המתאימים להן הם E_1 ו- E_2 , צריך להראות שהשדה שמתאים למכפלה החיצונית שלהן הוא $E_1 \times E_2 = H$, כאשר $\times$ זו המכפלה הוקטורית:

$$\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

וזכרים את זה:

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ההוכחה של הנכונות היא לפתוח את ההגדרות (חישוב פשוט). האינטואיציה יותר מעניינת – נסתכל על התרשים:

$$H = E_1 \times E_2$$

כידוע (למסתכלים בויקיפדיה), המכפלה הוקטורית מחזירה וקטור שמאונך

לשני הוקטורים, והגודל שלו הוא שטח המקבילית הנפרשת על ידם.



האינטואיציה לפעולת המכפלה החיצונית ($\wedge$) היא

אלמנט שטח, ולכן הפעלת המכפלה החיצונית על שני הוקטורים

היא (אינטואיטיבית) ה'צל' של אחת המקביליות על האחרת, כלומר

ההטלה - בדיוק כמו בוקטורים, זה גודל של אחת, כפול גודל ההיטל של השניה עליה,

ואכן ההיטל של המקבילית התחתונה על העליונה - בדיוק כמו מכפלה פנימית

(שהיא היטל על וקטור) מכפלת השטחים כפול קוסינוס הזווית (הסגולה) בניהן,

כאשר זווית בין מקביליות זו הזווית בין המישורים שהן פורשות. וזה בדיוק נפח המקבילון -

שטח הבסיס, כפול גודל H כפול סינוס הזווית (הירוקה). כמו כן, זה נותן לנו נוסחה מעניינת

נוספת: ההיטל של מקבילית אחת על השניה זה המכפלה הפנימית של הנורמאלים שלהן,

כלומר אם המקביליות נתונות כארבע וקטורים - זה

$$|a \times b| |c \times d| \cos(\alpha) = \langle a \times b, c \times d \rangle = \det(a \times b, c, d) =$$

רוטור (curl) –

הגדרה - בהינתן שדה וקטורי E , נבנה שדה וקטורי H באופן הבא – $H = \text{curl}(E) = \vec{\nabla} \times E$

כאשר X זו המכפלה הוקטורית, ו- $\vec{\nabla}$ הוא אופרטור הגזירה הבא –

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

כך למשל האיבר הראשון בוקטור הרוטור יהיה $D_2 E_3 - D_3 E_2$.
האינטואיציה היא שהרוטור הוא וקטור 'ציר הסיבוב' של השדה.
כלומר, אם נסתכל על השדה כשדה המהירויות של נוזל, ונקבע
מרכז של כדור בנקודה כלשהיא בפנים, 'הסיבוב' של השדה יהיה
הסיבוב של הכדור בהשפעת השדה. הרוטור הוא מאונך לכיוון

הסיבוב (הכיוון המדויק נקבע לפי כלל יד ימין) והגודל שלו פרופורציוני לגודל הסיבוב.

ניתן אינטואיציה למה הנוסחה לרוטור אכן מהווה את וקטור ציר הסיבוב. לשם כך נניח ראשית
שהשדה E כלוא במישור ה- xy , כלומר שקואורדינטת ה- z היא אפס, וכמנ כן שהנגזרת בכיוון איקס
מתאפסת, כלומר E קבוע לאורך קווים שמקבילים לציר האי-קס.

נצפה, שהסיבוב באיקס אפס בכיוון החיצים של המעגל יהיה

$$(\vec{c} - \vec{d}) - (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{c} - \vec{d} + \vec{b} - \vec{a}$$

כאשר השרטוט מתכוון סביב אי-קס-אפס. כעת, נשים לב כי

מתקיים ש $(\vec{c} - \vec{d})$ מתקרב אסימפטוטית ל $D_2 E_3$, כי זה הפרש

על פני ערכי y שונים של רכיב ה- z של השדה E . באופן זה עובר הרכיב

השני, נקבל שהנוסחה אכן מתארת את גודל הסיבוב.

(מליניאריות ואדפטיביות הרוטור זה הסיבוב בכל הצירים.)

מימד שתיים:

קשר בין שדות וקטורים שתואמים לחד תבנית במובן מכפלה (E) פנימית ובמובן דטרמיננטה (H):

נניח $\omega = f_1 dx + f_2 dy$ אז די ברור ש $E = (f_1, f_2)$. אבל נשים לב שמתקיים - $H = (f_2, -f_1)$.

זה למעשה סיבוב בתשעים מעלות: כפי שניתן לראות ההיטל הוא מכפלת הנגזרת

בגודל של E כפול קוסינוס הזווית הירוקה, ומצד שני שטח המקבילית

האפורה, שהוא גודל הנגזרת כפול הגודל של H כפול סינוס הזווית הסגולה.

כיוון ש H הוא סיבוב של E בתשעים מעלות, שני הגדלים שווים.

רוטור של חד תבנית בדו מימד – הוא $D_1 f_2 - D_2 f_1 = D_1 E_2 - D_2 E_1$ (למה זה פונקציה ולא

וקטור? כי ציר הסיבוב הוא תמיד על אותו מישור, אז אין משמעות לכיוון.

