פתרון תרגילים
אינטגרביליות + הכרח
סגירות לגבי של
המקן, מדידות ג'ורדן

<u>תזכורת</u>

$$osc_f(x) = f^*(x) - f_*(x)$$

$$f^*(x) = \limsup_{y\to x} f(y) \qquad f_*(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

<u>משפט</u> f אינט' ב-B $\iff$ $\int_B osc_f = 0$ $\iff$ $\forall \varepsilon>0 \quad v^*(\{x\in B \mid osc_f(x)\geq \varepsilon\})=0$

<u>תרגיל</u> f מדידה ג'ורדן אמ"מ $\int^*_B osc_{f_i}=0$.

$\Leftarrow$ f מדידה $\leftarrow$ f_i אינט' לכל תיבה B, לכן $\int^*_B osc_{f_i}=0$.

$\Rightarrow$ תהי קבוצה ג'ורדן $E\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, צ"ל ש-$E\cap X(f)$ ג'ורדן מדידה.

$X(f)=\{(x,t) \mid t<f(x)\}$

ואכן, ניקח i מספיק את הקורדינטה המקסימלית של E, ואז

$E\cap X(f) = E\cap X(f_i)$ ג'ורדן כי f_i אינט' ולכן מדידה.

<u>תרגיל</u> $osc_{f_i}\uparrow osc_f$. נראה כי $f_i^*\uparrow f^*$ ו- $f_{i*}\downarrow f_*$ וגם סיימנו.

הוכחה

$$f_i^*(x) = \limsup_{y\to x} f_i(y) \xrightarrow[i\to\infty]{} \uparrow \limsup_{y\to x} f(y) = f^*(y)$$

אכן ה-limsup סופי, אז יש i שממנו, ולכן ממנו והלאה יציב.

אם ה-limsup הוא $+\infty$ אז i יגדיל ה-limsup של f_i

סופי, i ~~...~~ לקטוע את ההתנהגות ~~...~~.

$f_{i*}\downarrow f_*$ באופן דומה.

<u>תרגיל</u> $osc_{f+g}\leq osc_f + osc_g$

הוכחה

$$(f+g)^* = \limsup_{y\to x}(f+g) \leq \limsup_{y\to x} f + \limsup_{y\to x} g = f^* + g^*$$

$$(f+g)_* = \liminf_{y\to x}(f+g) \geq \liminf_{y\to x} f + \liminf_{y\to x} g = f_* + g_*$$

לכן

$$osc_{f+g} = (f+g)^* - (f+g)_* \leq f^* + g^* - f_* - g_* = osc_f + osc_g,$$

תרגיל B תיבה $\varepsilon > 0$

אזי מתקיים

$$X = \{x \in B \mid osc_{f+g}(x) \geq 2\varepsilon\}$$
$$Y_i = \{x \in B \mid osc_{f_i}(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$
$$Z_i = \{x \in B \mid osc_{g_i}(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

אזי $X \subseteq \bigcup_i (Y_i \cup Z_i)$

פתרון:

$$2\varepsilon \leq osc_{f+g} \leq osc_f + osc_g \to \quad \varepsilon \leq osc_f \text{ או } \varepsilon \leq osc_g$$

נניח ש $osc\,h_i \uparrow osc\,h$ ~~ממונוטוניות~~ ~~יש~~

אזי $\varepsilon \leq osc\,h$ יש i מספיק גדול $\frac{\varepsilon}{2} \leq osc_{h_i}$ כנדרש.

תרגיל E_i, F_i קבוצות ג'ורדן $E_i \downarrow E$ $F_i \uparrow F$ $E \subseteq F$

אזי $\lim_i v(E_i) \leq \lim_i v(F_i)$.

פתרון -

$$\lim v(E_i) - \lim V(F_i) \overset{*}{=} \lim(v(E_i) - v(F_i)) \leq$$
$$\leq \lim V(E_i \setminus F_i) = 0$$

$V(E_i) - V(F_i) \leq V(E_i \setminus F_i)$ כיוון אזי $F_i \subseteq E_i$.

מאחר מהרצאה 7 - אזי $X_i \downarrow \emptyset$ אז $V_*(X_i) \downarrow 0$

ואכן $E_i \setminus F_i \downarrow \emptyset$ כי $F_i \uparrow F \supseteq E \swarrow E_i$

מסקנה מעניינת

נבחר ש $V(E_i) = V_*(E_i \setminus E) + v^*(E)$ כי E_i ג'ורדן ו- $E \subseteq E_i$.

וכמו כן $E_i \setminus E \downarrow \emptyset$ ולכן $V_*(E_i \setminus E) \downarrow 0$.

באופן דומה כיוון ש F_i ג'ורדן, הן של ג'ורדן ב F, ולכן $V_*(F_i) \uparrow V_*(F)$

ונקבל כי $V^*(E) = \lim_i V(E_i) \leq \lim_i V(F_i) = V_*(F)$

קבל אזי $F = E$, נקבל שכל קבוצה שניתנת לקירוב מונוטוני של קבוצות ג'ורדן גם מלמעלה וגם מלמטה היא קבוצה ג'ורדן מוגדרת.

~~הוכחה~~ ~~זה~~

מסקנה נוספת - נניח כי E סגורה קומפקטית, ו-F_i רשת פריסלים שמכסה את E מראש,

נקבל ש $v^*(K) \le \lim_i v(F_i)$.

חיבור

הוכחה משפט האדיטיביות של הפונקציות המדרגות צעדון -

נניח g,f מדרגות - נראה $g+f$ מדרגה, תחת תיבה B.

מספיק להראות כי $\int^*_B osc_{f+g} = 0$ וזה שקול לכך שלכל

ε ~~[illegible]~~ מתקיים $v^*(X_\varepsilon) := v^*(\{x\in B \mid osc_{f+g} \ge 2\varepsilon\}) = 0$

יודעים ממסקנה קודמת ש $X_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (Y_{\varepsilon_i} \cup Z_{\varepsilon_i})$

כאשר

$Y_{\varepsilon_i} = \{x\in B \mid osc_{f_i}(x) \ge \frac{\varepsilon}{2}\}$

$Z_{\varepsilon_i} = \{x\in B \mid osc_{g_i}(x) \ge \frac{\varepsilon}{2}\}$

כמו כן, ~~[illegible]~~ ממדידות של f ו-g $0 = v_*(Z_{\varepsilon_i}) = v_*(Y_{\varepsilon_i})$

אלו נקודות אמיתיות כי Y,Z מוכלות ב-B ולכן אפשר להוריד את ה-$*$.

~~[illegible]~~

כמו כן X_ε היא סגורה, כי את

נקודות שבהן ל-$g+f$ אוסילציה של ~~[illegible]~~ לפחות 2ε - [illegible]

גם היא סגורה 2ε. (תרגיל בתרגול 7 של פשוט עם limsup-ים ו-liminf-ים)

כעת נגדיר $F = \bigcup_i (Y_{i_\varepsilon} \cup Z_{i_\varepsilon})$ $F_i = \bigcup_{j=1}^{i} (Y_{j_\varepsilon} \cup Z_{j_\varepsilon})$ $F_i \uparrow F$

$E = X_\varepsilon \subseteq F$ אזי מהמסקנה ~~[illegible]~~ [illegible] (שכן לכל ε ש-X_ε סגורה ומוכלת ב-B לכן קומפקטית)

$v^*(X) \le \lim_i v(F_i) = 0$ כאשר $v(F_i) = 0$ כאיחוד סופי של מידה 0. (בגלל הן מדידות-ז'ורדן)

לכן X ממידה 0 ולכן $g+f$ מדרגה!

∎