10/12/13

61

שיעור 9

אינטגרציה: "למה זה טוב כל הזה?"

פונ' נקודה: $\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto f(x)\in\mathbb{R}$

פונ' קבוצה: $\mathbb{R}^n \supseteq E \longmapsto F(E)\in\mathbb{R}$

ונגדיר $F[E]=\int_E f(x)dx$.

> ⊛ המסה היא לא פונ' של נקודה אלא של קבוצה. מעין סוג של שיטה... מגדיר את הפיזור של המסה החלקה

⊖ היינו רוצים ש-F תהיה אדיטיבית לאיחוד זר.

⊖ היינו רוצים גם שיתקיים $vol(E)\cdot\inf_E f \le F(E)\le \sup_E f\cdot vol(E)$

כלומר שהאינטגרל גדול מהערך הקטן כפול הנפח של הקבוצה וקטן מהערך הגדול כפול הקבוצה כפול הנפח.

> האינטגרל מדבר על צפיפות של המסה לנפח

⊖ נראה שיהיה אפשר לעשות אינטגרציה על הרבה דברים, לא רק תיבות.

חצי-משטח עשויה אינטגרציה לתיבות חצי-ממדית ← קטע סגור

⊖ נרצה אינווריאנטיות לשינויים של האינטגרל.

> פיזיקאים חושבים מושג מתמטי של הצבע, ולא כמו את הצבע. המושג מגדיר הרבה דברים.

$$F'=f \;\to\; \int_a^b f = F([a,b]) = F(b)-F(a)$$

האינטגרל על $[a,b]$; פונ' הקבוצה על $[a,b]$; ⊖ נשים לב במקום אחד

מעניין

> המסה היא האינטגרל על הצפיפות בנפח מסוים. כלומר אינטגרל מקשר בין קבוצה לערך אחרי הערב. פונ' נקודה, שנק' נקודה נותנת את הצפיפות שלה.

הגדרה:

הגדרה 1: יהי קטע $I\subseteq\mathbb{R}$. אז חלוקה P של I זו קבוצת נקודות $\{t_0<t_1<\dots<t_n\}$ כאשר $t_0=a$; $t_n=b$

ואז $I=\bigcup J_i$ כאשר $J_i=[t_{i-1},t_i]$; [נשים לב שהקטעים נחתכים בנקודות]

⊖ גם כאשר $n=1$ זו חלוקה, טריויאלית.

עידון: P' הוא עידון של P אם $P\subseteq P'$. כלומר הוספנו נקודות לחלוקה.

אורך: נגדיר אורך של קטע I: $length(I)=\sum_{k=1}^{n} length(J_k)$ כלומר אורכי החלוקות.

עידון משותף:

בהינתן P_1,P_2 חלוקות אז עידון משותף שלהן זה $P=P_1\cup P_2$.

סכומי דרבו:

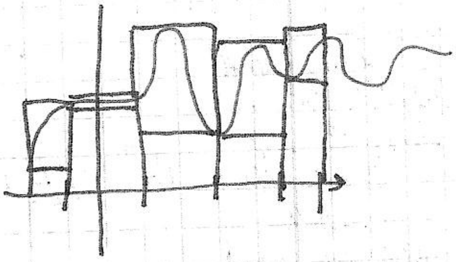
⊖ תהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונ' חסומה. נגדיר סכום דרבו של f לפי חלוקה P:

סכום דרבו תחתון: $L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} length(J_k)\inf_{J_k} f$;

סכום דרבו עליון ← $U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} length(J_k)\sup_{J_k} f$

10/12/13 62

המשך שיעור 9



⊙ נשים לב כי $L(f,P) \le U(f,P)$

⊙ כמו כן אם $P_1 \supseteq P$ אז [חלוקה עדינה יותר - הסכומים הסופיים [illegible]

$$L(f,P) \le L(f,P_1) \le U(f,P_1) \le U(f,P)$$

טענה:

לכל P_1,P_2 חלוקות: $L(f,P_1) \le U(f,P_2)$

עידון משותף

וזה נובע כי: $L(f,P_1) \le L(f,P_1 \cup P_2) \le U(f,P_1 \cup P_2) \le U(f,P_2)$

הגדרה:

אינטגרל תחתון:

$$\int_{*I} f = \sup_P L(f,P)$$

כלומר סופרמום על פני כל החלוקות האפשריות, ולוקחים הסכום התחתון.

אינטגרל עליון:

$$\int^* f = \inf_P U(f,P)$$

הסכום העליון הקטן ביותר

נקבל כי: $\int_* f \le \int^* f$ כי $U(f,P_1) \ge L(f,P_2)$ לכל P_1,P_2

⊙ אם האינטגרל העליון שווה לאינטגרל התחתון נאמר שהפונ' אינטגרבילית והאינטגרל שווה לערך השווה של העליון והתחתון.

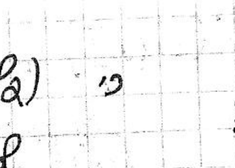
⊙ אינטגרל לא מושלם מהגדרה, ושיהפוך!

⊙ היינו רוצים למצוא תנאים על פני הקבוצה F כך ש $\int_* f \le F \le \int^* f$

רק אם f אינטגרבילית קיבלנו שהאינטגרל שווה לערך פני הקבוצה.

מימד 2:

במקום קטע יש לנו מלבן



[במקרה הרב מימדי יש לנו תיבה שהיא מכפלה קרטזית של n קטעים סגורים, לא מנוונים]

נסמן: עבור תיבה $B = I_1 \times \dots \times I_k$ אז

$$vol(B) = \prod_{i=1}^{k} length(I_i)$$

חלוקה: $P = P_1 \times \dots \times P_n$, כאשר מכפלה קרטזית של חלוקות במימד 1, כלומר על הצלעות ומקבלים $B =$ [illegible] ; כלומר חלוקה זה הרבה מלבנים.

10/12/13 דף 3

המשך שיעור 4

⊖ נשים לב שלא כל חלוקה של מלבן היא חלוקת מכפלה! למה אנחנו בכלל מתעסקים רק בתיבות שהן קבוצת מכפלה? כי זה יותר נוח לטיפול! בסוף נגיע לדוגמא אחת וחלוקה אחת. את כל התיאוריה נבנה על קבוצת מכפלה, וחלוקת מכפלה.

לכל חלוקה הכללית קיימת חלוקת מכפלה עדינה יותר ממנה, לכן דרישת חלוקת מכפלה לא מגבילה את הכלליות כי תמיד מתפסים חלוקה עדינה אינפיניטסימלית.

<u>עידון של חלוקה:</u> עידון של חלוקה $P=P_1\times\dots\times P_n$ זה מכפלה של עידונים בכל מימד $P'=P_1'\times\dots\times P_n'$ כאשר P_i' עידון של P_i.

<u>נראה:</u>

$\mathrm{vol}(B)=\sum_{G\in P}\mathrm{vol}(G)$ <u>כי:</u>

$$\sum_{G\in P}\mathrm{vol}(G)=\sum_{\substack{J_1\in P_1\\ \vdots\\ J_n\in P_n}}\mathrm{vol}(J_1\times\dots\times J_n)=\sum_{\substack{J_1\in P_1\\ \vdots\\ J_n\in P_n}}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{length}(J_i)\ \overset{\boxed{\text{בגלל תכונות החלוקה.}}}{=}\ \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{J_i\in P_i}\mathrm{length}(J_i)\Big)=\mathrm{vol}(B)$$

מפתיחת סוגריים.

מידורות חד-מימד...

בגלל זה היה נוח לעבוד עם קבוצת מכפלה

<u>עידון משותף:</u> נקח עידון משותף בכל ציר ונקבל קבוצת מכפלה...

⊖ באותו האופן אפשר להגדיר סכום עליון וסכום תחתון עם סופרמום ואינפימום ולהכפיל בנפח של התיבה הקטנה, לכל תיבה קטנה בחלוקה. ואם הסכום העליון זה הסכום התחתון נאמר שהיא אינטגרבילית.

⊖ הרבה פעמים אי-אפשר להגדיר את זה במרחק אוקלידי כלל שלא נתון בסיס אורתונורמלי כי עוד לא הוכחנו אינווריאנטיות לשינוי בסיס, לאחר שנוכיח אינווריאנטיות לסיבוב... אבל כן אפשר להגיד שזה מוגדר על מכפלה של מרחבים אוקלידיים חד-ממדיים.

בעתיד נשמור קטיה IS

<u>תכונות של אינטגרלים:</u>

1) $\int_B G = G\cdot\mathrm{vol}(B)$ [ובפרט פונ' קבועה היא אינטגרבילית]

<u>הוכחה:</u> נקח החלוקה הטריוויאלית P_1. $U(f,P_1)=C\cdot\mathrm{vol}(B)$; $L(f,P_1)=C\cdot\mathrm{vol}(B)$

לכן כבר קיבלנו הפיקה, ולכן כל חלוקה עדינה יותר זה ישאר זהה.

לכן האינטגרל חייב להיות $C\cdot\mathrm{vol}(B)$. ובבירור שיש אינטגרביליות כי אינטגרל עליון שווה לאינטגרל תחתון.

2) מונוטוניות של אינטגרל:

$f\le g$ בכל B $\Longrightarrow \int_{*B} f\le\int_{*B} g$; $\int_B^* f\le\int_B^* g$

10/12/13 64

המשך שיעור 9

(*) מק ש ~~…~~ $g\le f$ אז $\int^{*} f \ge \int_{*} g$

3) **הומוגניות:** לכל $C\ge 0$:

$$\int_{*B} cf = c\int_{*B} f$$

$$\int_B^{*} cf = c\int_B^{*} f$$

לכל $C\le 0$

$$\int_{*B} cf = c\int_B^{*} f \quad ; \quad \int_B^{*} cf = c\cdot\int_{*B} f$$

כל הומוגניות היא רק לפונקציה חסומה

ואם f אינטגרבילית אז לכל $C\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_B cf = c\int_B f$$

4) **אדיטיביות:** לכל $f,g:B\to\mathbb{R}$ פונ' חסומות.

$$\int_B^{*}(f+g) \le \int_B^{*} f + \int_B^{*} g$$

$$\int_{*B}(f+g) \ge \int_{*B} f + \int_{*B} g$$

פורמאלית לא יש חסך זה פונקציה ונוכיח של

ואם f ! g אינטגרביליות אז

$$\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g$$

5) **לינאריות:**

במקרה ש f_i אינטגרביליות אז לכל $C_i\in\mathbb{R}$ נקבל

$$\int_B c_1f_1+\ldots+c_nf_n = $$
$$= c_1\int_B f_1+\ldots+c_n\int_B f_n$$

תרגיל:

אם $f_n:B\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ! $\sup_B|f-f_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ כלומר התכנסות במ"ש

$f_n \xrightarrow{u} f$! $f:B\to\mathbb{R}$ אז פונ' f אינטגרבילית.

תרגיל: נתון ש $f_n\to f$ נקודתית ! f_n אינטגרביליות אבל f לא אינטגרבילית.

טענה: אם $f_n:B\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ! $f:B\to\mathbb{R}$! $\int_B^{*}|f_n-f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

אז f אינטגרבילית.

התכנסות L_1

(*) נשים לב שהתכנסות במ"ש גוררת תנאי זה, אבל לא להפך.

הוכחה: נסמן $\varepsilon_n=\int_B^{*}|f_n-f|$.

$$-|f_n-f|\le f_n-f\le|f_n-f|$$

לכן:

$$\int_B^{*} f_n-f \le \int_B^{*}|f_n-f| = \varepsilon_n \quad ; \quad -\varepsilon_n \le \int_{*B} f_n-f$$

לכן:

$$0 \leftarrow -\varepsilon_n \le \int_{*B} f_n-f \le \int_B^{*} f_n-f \le \varepsilon_n \rightarrow 0$$

10/12/13 ה 6

המשך שיעור 4

המשך הוכחה: $f = f_n + (f - f_n) \longleftarrow$

~~$f_n = f + (f_n - f)$~~

$$\int^* f \le \int^* f_n + \underbrace{\int^* f - f_n}_{\le \varepsilon_n}$$

$$\int_* f \ge \int_* f_n + \int_* f - f_n = \int_* f_n - \underbrace{\int^* f - f_n}_{\ge -\varepsilon_n}$$

לכן:

$$\int_* f_n - \varepsilon_n \le \int_* f \le \int^* f \le \int^* f_n + \varepsilon_n$$

אם f_n אינטגרביליות לכן

$$\int_* f - \int^* f \le 2\varepsilon_n$$ כאשר ε_n קטן כרצוני.

לכן $\int_* f = \int^* f$ ולכן f אינטגרבילית [illegible].

10/12/13

תרגול · שבוע 9

תרגיל: חשבו את $\frac{d^2y}{dx^2}(0)$ של $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה בסביבת $(0,1)$! ע"י $x^3 - xy + y^2 = 1$

פתרון: כאשר נבדוק שתנאי משפט הפונ' הסתומה מתקיימים עבור נקודה ש-y תהיה פונ' של x בסביבת $(0,1)$, ולכן נגדיר $f(x,y) = x^3 - xy + y^2 - 1$ ונקבל

$$f_y(x,y) = -x + 2y$$

ובנקודה $(0,1)$ נקבל $f_y(0,1) = 2 \neq 0$. ולכן הדיפרנציאל הפיך ולכן מהמשפט $y = y(x)$ בסביבת $(0,1)$.

כפי שקודם הנגזרת של פונ' הקשר בינהם גוזרים פונ' הסתומה. ובעזרת המשפט.

מנגזרת המשוואה הסתומה / לפי משפט הפונ' הסתומה נקבל

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 - y}{-x + 2y} \longrightarrow y' = -\frac{3x^2-y}{-x+2y} \quad (*)$$

נגזור שוב לפי x ונקבל [נזכר ש $y = y(x)$]

$$y''(x) = -\frac{(6x - y')(-x+2y) - (2y' - 1)(3x^2 - y)}{(-x+2y)^2} \quad (**)$$

עפ"י $(*) \longleftarrow$ $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$

ולכן מהצבה נקבל! $y''(0) = \frac{1}{4}$

תרגיל: השתמשו במשפט הפונ' הסתומה כדי למצוא את הערכי של y המקס' והמינימ' על האליפסה המוגדרת $x^2 + y^2 + xy = 27$.

פתרון: נגדיר $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 27$. נשים לב כי הקבוצה $\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ קומפקטית.

10/12/13 66 המשך ~~שאלה~~ תרגיל 9

לכן יש נקודה מקסימום ומינימום לפונ' $g(x,y)=y$.

נניח כי (a,b) נק' קיצון, אם $f_y(a,b)\neq 0$ אז ממשפט הפונ' הסתומה בסביבת הנקודה (a,b) מתקיים $f(x,y)=0 \longleftrightarrow y=y(x)$,
כלומר x מגדיר את y באופן יחיד.

וכן מתקיים $y'(x)=\frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$, מאחר והנק' היא נק' מקסימום של $y(x)$

אז נקבל $0=y'(a)=\frac{-f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$ [נזכר ש $f_y(a,b)\neq 0$]

לכן בנקודה קריטית אז ש

$2b+a=f_x(a,b)=0$ וגם $2a+b=f_y(a,b)=0$.

בנוסף צריך שיתקיים $a^2+b^2+ab-27=f(a,b)=0$

מפתרון המשוואות יש 4 פתרונות $(3,6),(-3,6),(3,-6),(-3,-6)$

לכן המקסימום הוא 6.

תרגיל: הראו שאינטגרביליות לא נשמרת תחת התכנסות נקודתית, כלומר תנו דוגמא לפונ' f_n אינטגרביליות כך ש $f_n\to f$ נקודתית! f לא אינטגרבילית.

פתרון: נמספר הרציונלים בקטע $[0,1]$; $\mathbb{Q}=\{q_i\}$ ונגדיר

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{q_i\}}(x)$$

אזי f_n אינטגרביליות אבל $f_n\to f$ נקודתית כך ש $f=$ פונ' דירכלה.

⊖ כשעוברים לפרמטריזציה בכל כיוון לא רק משתנים לפי השינוי/התמורה של הכיוון הנה. ולכן מקבלים פרמטריזציה של המישור.

12/12/13   67

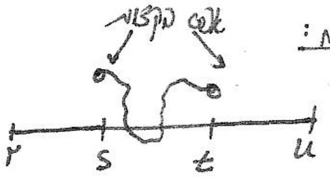
שיעור שבוע 9

⊖ אפשר להגדיר התכנסות נוספת לפונ', בשונה מהתכנסות במ"ש שבוע. התכנסות מאוד חזקה.

⊖ אפשר להגדיר התכנסות באינטגרל שבה שהאינטגרל העליון של ההפרש בינהן הולך לאפס

שומר התכנסות אינטגרבילית: $\int^{*}|f_n-f| \longrightarrow 0$ והאינו שבה גורר שאם f_n אינטגר' אז f אינטגרבילית וניתן להחליף גבול ואינטגרל.

<u>נניח:</u>



האם $\int_{[r,u]} f \overset{?}{\geq} \int_{[s,t]} f$

שומר האם אין השפעה לקטע שבו הפונ' מאפסת. השוו לה לנקודת הקצה.

<u>טענה:</u> , זה נכון! [עבור תחתון/עליון]

כאשר P_1 חלוקה של $[s,t]$ $\rightarrow$ $\int^{*}_{[s,t]} f = \inf_{P_1} U(f,P_1)$

כל חלוקה של $[s,t]$ ניתן להרחיב לחלוקה של $[r,u]$.

אם P_1 חלוקה של $[s,t]$ אפשר להרחיב לחלוקה P_2 של $[r,u]$

נסמן $P_2 = P_1 \cup \{r,u\}$ ומשום שהפונ' מתאפסת כאן פס! מ-t נקבל

$U(f,P_1) = U(f,P_2) \longrightarrow \underbrace{\inf U(f,P_1)}_{\int^{*}_{[s,t]} f} = \inf U(f,P_2)$

נשים לב ש P_2 אינה חלוקה כללית של $[r,u]$ אלא תלויה ב P_1...

לכן: $\inf U(f,P_2) \geq \overbrace{\inf_{P} U(f,P)}^{\int^{*}_{[r,u]} f}$; לכן קיבלנו

$$\int^{*}_{[s,t]} f \geq \int^{*}_{[r,u]} f$$

<u>נראה א"ש בכיוון השני:</u>

יהי P_2 חלוקה של $[r,u]$

נוסיף לה את s,t

אז: $P_2' = P_2 \cup \{s,t\}$

! P_2' הוא עידון של P_2.

לכן $U(f,P_2') \leq U(f,P_2)$; אפשר להגדיר חלוקה של $[s,t]$ בעזרת P_2'

ונקרא לה $\tilde{P}_2$. משום שהפונ' מתאפסת כאן זה לא תורם לערך האינטגרל! לכן

$U(f,\tilde{P}_2) = U(f,P_2') \leq U(f,P_2) \longrightarrow \underbrace{\inf U(f,\tilde{P}_2)}_{\text{אינפימום של תת-קבוצה, גדול מהאינפימום לקבוצה כולה}} \leq \underbrace{\inf U(f,P_2)}_{\int^{*}_{[r,u]} f}$

(תורמים שלא גורמים.. ; עידון)

VI

$\int^{*}_{[s,t]} f$

לכן קיבלנו א"ש דו-כווני ולכן: $\int^{*}_{[s,t]} f = \int^{*}_{[r,u]} f$ כמו שרצינו...

נגדיר זה מקום בסוף אמו זה עבור תחתון

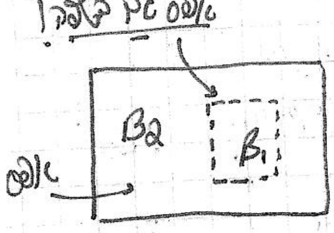
2/12/13 'ב 69

המשך שיעור 4

עכשיו נרצה להכליל להרבה מימדים את הטענה הקודמת:

יהיו $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש $B_1 \subset B_2^\circ$ תיבות. זה כמו בחד-מימד!

כמו כן $f: B_2 \to \mathbb{R}$ חסומה. ! $f\big|_{B_2\setminus B_1^\circ} = 0$



אז מתקיים

$$\int^*_{B_1} f = \int^*_{B_2} f$$

$$\int_{*B_1} f = \int_{*B_2} f$$

__הוכחה__: כמו ההוכחה בחד-מימד כי החלוקות שלנו הן תמיד חלוקות מרובה.

טענה נוספת:
אם הוא לא משנה
אלא היא אי-שלם
אם האינטגרל הך
ביחד ימו, ולא רק
ימין

__הגדרה__: פונ' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ תקרא בעלת תומך חסום אם $\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\neq 0\}$ קבוצה חסומה.

__הגדרה__: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פ' חסומה בעלת תומך חסום. נגדיר

$$\int^*_{\mathbb{R}^n} f = \int^*_{B} f \;;\; \int_{*\mathbb{R}^n} f = \int_{*B} f$$

עם B תיבה שמכילה את $\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\neq 0\}$ בפנים שלה!
ולכן מחוץ ל-B ועל השפה שלה הפונ' מתאפסת.

- כמו כן ברור שאין חשיבות לאיזה תיבה B נבחר, כי הראינו בטענה לעיל את השוויון, כלומר שהערך שלוקח f מתאפס לא תורם לאינטגרל: כי את שני התיבות אפשר להכיל בתיבה שמכילה את ולהשתמש בטענה לעיל.

- אינטגרל רימן מוגדר רק לפונ' חסומה עם תומך חסום.

__טענה__: אם $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ חסומות עם תומך חסום אז אם $f\le g$ אז

$$\int^*_{\mathbb{R}^n} f \le \int^*_{\mathbb{R}^n} g \quad ! \quad \int_{*\mathbb{R}^n} f \le \int_{*\mathbb{R}^n} g$$

[מתקיים כי ניקח תיבה שמכילה את שני התומכים ונשתמש בטענה שאנו יודעים]

- כמו כן נקבל גם לינאריות ואדיטיביות וכו' [illegible]

נפח ומידת ז'ורדן

בעזרת תיבות ב-$\mathbb{R}^n$ האינטגרל

__הגדרה__: תהי $E\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה; אז $\int_* \mathbb{1}_E = v_*(E)$

וכמו כן $v^*(E) = \int^* \mathbb{1}_E$; ואם $\mathbb{1}_E$ הנו פונ' אינטגרבילית

אז E תקרא קבוצה מדידה לפי ז'ורדן ! $v(E) = \int \mathbb{1}_E$