19/11/13 ג"ק

שיעור שבוע 6

שאלה: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ גזירה ב-x_0 ו-$(Df)_{x_0}$ הפיכה, האם $f(U)$ מכיל סביבה של $f(x_0)$ כאשר x_0 בתוך U? כן! מטופולוגיה אלגברית.

$(x,y,z)=0$ (*)
מגדיר משטח

התחום: שתי פונ' אילוץ ופונ' מטרה שצריך למקסם/למזער בתלות מימדים. כל פונ' אילוץ מגדירה משטח, החיתוך שלהם זה מסילה. נחפש קיצון על המסילה. ~~...~~ אם הוקטורים הם בת"ל אז הנקודה אינה קיצון כאשר הוקטורים זה הגרדיאנטים. זה לא מימד n ו-1-n אילוצים.

טענה: אם $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ גזירות ברציפות ($\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ מ-) סביב $w_0=(x_0,y_0,z_0)$ ו-∇g ו-∇f בנקודה (x_0,y_0,z_0) אז קיימת מסילה, וקיים ε חיובי, שמוגדרת $(w_0-\varepsilon, w_0+\varepsilon)$ כך ש-$\gamma(w_0)=(x_0,y_0,z_0)$ ולכל t מתקיים $f(\gamma(t))=t$ ו-$f(g(t))=0$. [ולכן אין נקודת קיצון...]. [כלומר חסר אילוץ אחד...]

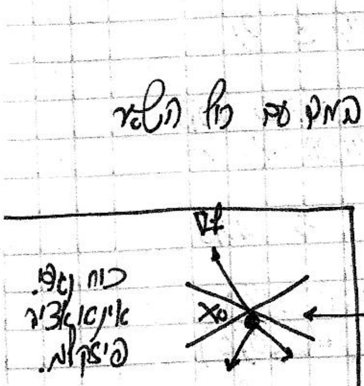
הוכחה: נשים לב כי $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ ו-$\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ וקטורים בת"ל, ולכן קיים a ב-$\mathbb{R}^3$ כך ש-a ביחד עם שני אלה הם בת"ל. קיימת $g_a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות בסביבה של (x_0,y_0,z_0) כך ש-$a=\nabla g_a(x_0,y_0,z_0)$ [בפרט הפונ' הלינארית שהדיפ' שלה היא a] ולכן יחד עם g_a האילוץ הנוסף אנחנו מקיימים את תנאי המשפט הקודם ולכן קיימת מסילה כנדרש... ולכן אין נק' קיצון על המסילה, ובפרט לא על המשטח שהוא $g(x,y,z)=0$

כופלי לגראנז'

משפט: נניח כי $f,g_1,\ldots,g_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות מסביב ל-$x_0\in\mathbb{R}^n$ ומתקיים כי $\{\nabla g_i(x_0)\mid i\in[m]\}$ היא קבוצה בת"ל. אם x_0 היא נק' קיצון של f בהינתן $g_i(x_0)=0$ לכל i. אז קיימים $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ כופלי לגראנז' כך ש:

$$\nabla f(x_0)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla g_i(x_0)$$

הוכחה: נובע מיידית מהטענה הקודמת... כי אם גם f בת"ל במחיר עם כל השאר אז x_0 לא קיצון... [כי הגרדיאנטים של ∇g_i בלתי תלויים וכו'...]



שיווי משקל

19/11/13   40

תרגול שיעור 6

*התנאי לעיל הוא תנאי הכרחי לקיצון אבל לא מספיק...

$(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$
$(x_1,\dots,x_n)$
$m+n$ נעלמים.

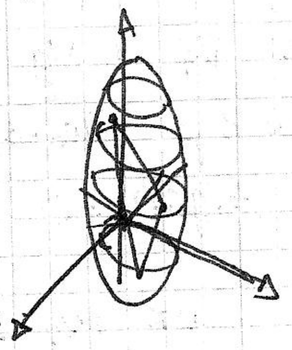
$$
\begin{array}{c} m \\ n \\ \hline m+n \\ \text{משוואות} \end{array}
\left\{\begin{array}{l}
g_1(x)=0,\ g_2(x)=0,\ \dots,\ g_m(x)=0 \\
\nabla f(x)=\lambda_1 g_1(x)+\dots+\lambda_m g_m(x)
\end{array}\right.
$$

לכן המערכת אפשר לפתור ולמצוא את הפתרונות ולבדוק מי מהם הוא אכן קיצון... לא תמיד אפשר לפתור אותן...

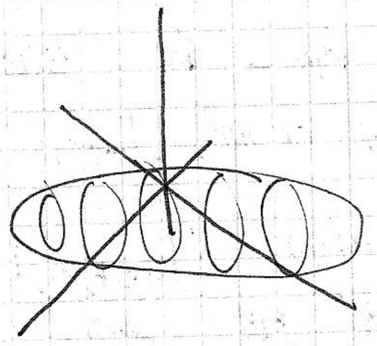
נשים לב כי $G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ אז $\nabla g_{1_{x_0}},\dots,\nabla g_{m_{x_0}}$ בת"ל אמ"מ Dg_{x_0} הוא על.

דוגמה:

$\{(x,y,z) : x^2+y^2+\alpha z^2=1\}$ כאשר $\alpha\in(0,1)\cup(1,\infty)$



או



נמצא שלוש נקודות במשטח המקסימום של השטח של המשולש

המטרה: $\max\left(|P-Q|^2+|Q-R|^2+|R-P|^2\right)$ [שלוש נקודות על הביצה]

התוצאה תהיה שהמקסימום מתקבל על פני חתך אופקי/אנכי שעובר בראשית הצירים.

כלומר האפשרויות יהיו $\{(x,y,z) \mid r=0\}$ או $\{x,y,z \mid x=0\}$

והשלוש נקודות יהיו באותה הקבוצה הזאת.

נסמן: $P=(x_1,y_1,z_1)$; $Q=(x_2,y_2,z_2)$; $R=(x_2,y_2,z_2)$

פונ' המטרה היא

$$f(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3)=$$
$$=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2+(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2$$

כלומר סכום ריבועי המרחקים.

פונ' האילוצים:

יש 3 אילוצים

$$
\text{המשוואות של אליפסה}\left\{\begin{array}{l}
g_1(\dots)=x_1^2+y_1^2+\alpha z_1^2-1 \\
g_2(\dots)=x_2^2+y_2^2+\alpha z_2^2-1 \\
g_3(\dots)=x_3^2+y_3^2+\alpha z_3^2-1
\end{array}\right.
$$

ברור שהם גזירים ברציפות כי כל הפונ' הן פולינומים

ברור ש Z_g קבוצה קומפקטית ; [Z_g הקבוצה שעליה 3 האילוצים מתקיימים]

נשים לב:

$$\nabla g_1=(2x_1,2y_1,\alpha\cdot 2z_1,0,\dots,0)=0 \longleftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$$

אבל נקודה זו לא על הספרואיד.

19/11/13   41

<u>המשך שיעור 6</u>

<u>המשך פתרון:</u> כמו כן ברור שהפונקציה גזירה, כי בכל זוג הקורדינטות שאין אפס שונה. לכן $\nabla g_1, \nabla g_2, \nabla g_3$ בת"ל, בכל הנקודה Z_g.

עכשיו נרצה לפתור את מערכת כופלי לגרנז'.

<u>נשים לב:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1-x_2) - 2(x_3-x_1) = 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6x_1 - 2(x_1+x_2+x_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 6x_k - 2(x_1+x_2+x_3) \;;\; \frac{\partial f}{\partial y_i} = 6y_i - 2(y_1+y_2+y_3) \;;\; \frac{\partial f}{\partial z_k} = 6z_k - 2(z_1+z_2+z_3)$$

<u>לכן משוואות לגרנז':</u> [צריך לכתוב את סוף האינדקס]

3 משוואות, עבור הקורדינטות הראשונות של הוקטור

9 משוואות

$$\begin{cases} 6x_k - 2(x_1+x_2+x_3) = \lambda_k \cdot 2x_k \\ 6y_k - 2(x_1+x_2+x_3) = \lambda_k 2y_k \\ 6z_k - 2(z_1+z_2+z_3) = \lambda_k \cdot 2\alpha z_k \end{cases}$$

$\leftarrow$ כל השאר בספר המשפט...

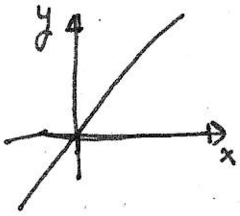
$\longrightarrow$ נוסיף עוד 3 משוואות שהן האילוצים $g_1=g_2=g_3=0$

נקבל סה"כ 12 משוואות.

<u>נשים לב שמתקיים:</u>

$$\left.\begin{aligned} (3-\lambda_k)x_k &= x_1+x_2+x_3 \\ (3-\lambda_k)y_k &= y_1+y_2+y_3 \\ (3-\alpha\lambda_k)z_k &= z_1+z_2+z_3 \end{aligned}\right\} \longrightarrow (y_1+y_2+y_3)x_k = (3-\lambda_k)x_k y_k = (x_1+x_2+x_3)y_k$$

<u>מקרה 1:</u> $x_1+x_2+x_3 \neq 0$ או $y_1+y_2+y_3 \neq 0$ אז לכל $1 \le k \le 3$ מתקיים



$(x_k, y_k) \in \{(x,y) \mid (y_1+y_2+y_3)x = (x_1+x_2+x_3)y\}$ $\leftarrow$ קו במישור...

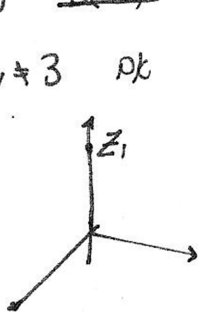
הנקודה (x_k, y_k) היא ההטלה של (x_k, y_k, z_k) על ציר xy. לכן נקודה (x_k, y_k, z_k) שייכת למישור

<u>המישור:</u> $\{(x,y,z) \mid (x_1+x_2+x_3)y = (y_1+y_2+y_3)x\}$;

$$\{P,Q,R\} = \{(x_k, z_k, y_k)\}$$

<u>מקרה 2:</u> נניח ש $x_1+x_2+x_3 = y_1+y_2+y_3 = 0$ וכן $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \neq (3,3,3)$

אם $\lambda_1 \neq 3 \longrightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 0$ אז $P = (x_1, y_1, z_1)$!לכן $P = (0,0,z_1)$

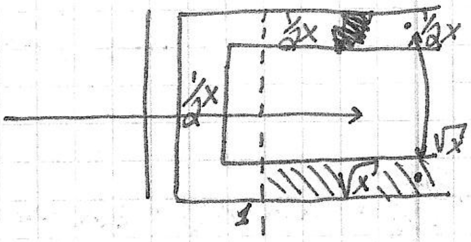


19/11/13 42

תרגול שבוע 9

דוגמא לפונ׳ שהנגזרת חסומה אך לא ליפשיץ:

זה לא ליפשיצית, כי יש סדרת נק׳ שהמרחק ביניהן קבוע אבל המרחק של הפונ׳ ביניהן לא חסום.



<u>הסבר למה שלמדנו שבוע שעבר:</u> $f:U\to\mathbb{R}^m$ ו־ $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה. כך ש־ $(Df)_x$ <u>על</u> לכל $x\in U$, אזי f פתוחה. [גם $f\in C^1$]

⊖ אם $n=m$ הטענה נכונה, עשינו שבוע שעבר.

⊖ $n<m$ לא אפשרי כי זה על.

⊖ נניח $n>m$. יהי $y_0\in U$ נראה שקיים סביבה של $f(y_0)$ שמוכלת ב־$f(U)$

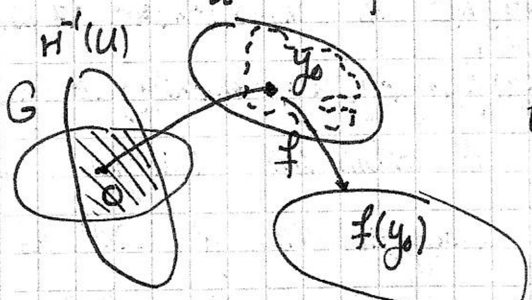
נבחר $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ כך ש־ $(Df)_{y_0}\circ T$ הוא הפיך.

(נגדיר $H=T+y_0$ אזי $H(0)=y_0$ ומתקיים $(DH)=T$.

<u>מתקיים:</u>

$$(D\, f\circ H)_{(0)}=(Df)_{H(0)}\circ T=(Df)_{y_0}\circ T=ID$$

לכן יש סביבה פתוחה של אפס, G, כך ש־ $D(f\circ H)_u$ הפיך בכל $u\in G$ מרציפות הדטרמיננטה והעובדה של D זה הפיך.



נתבונן ב־ $U_1=G\cap H^{-1}(U)$.

מתקיים ש־ U_1 פתוחה כחיתוך סופי של פתוחות! H הומאומורפיזם.

<u>מהמשפט</u> ההפיכה:

$$f\circ H: U_1\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

פתוחה! לכן יש קבוצה פתוחה של U שנותנת לסביבה פתוחה של $f(y_0)$!

מתי! $H(U_1)\subseteq U$ נקבל כי $f\circ H(U_1)\subseteq f(U)$; אבל $f\circ H(U_1)$ פתוחה מהמשפט! $f(y_0)\in f\circ H(U_1)$, לכן קיימת סביבה פתוחה של $f(y_0)$ שנמצאת ב־$f(U)$

<u>תרגיל:</u> נתבונן ב־ $S^n=\left\{f: f^{(n)}(\cdot)=n!\right\}$ כאשר $T:\mathbb{R}^n\to S^n$ כלומר פולינום מתוקן ממעלה n. וזה מרחב אפיני שהוא $t^n+P_{n-1}[t]$ כלומר נקודה פלוס מרחב לינארי:

T מוגדרת להיות: $T(a_0,\dots,a_{n-1}) = t^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i t^i$

T הוא הומאומורפיזם דיפאומורפיזם לינארי בין $\mathbb{R}^n$ ו־ S^n

19/11/13 43

הוכחת תרגיל 6

הוכחת תרגיל: תהי U קבוצה:

$U = \{(a_0,\dots,a_{n-1}) \mid T(a_0,\dots,a_{n-1})$ בעלת n שורשים שונים$\}$

טענה: U קבוצה פתוחה.

ולשם כך נראה כי אם $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0 = (x-t_1)\cdots(x-t_n)$ כאשר השורשים שונים כלומר $t_i \neq t_j$, ויש סדרה $p_n \to p$ אזי החל ממקום מסוים בסדרה לכל הפולינומים יש n שורשים שונים. בה"כ $t_1<\dots<t_n$. יהי $[a,b]$ אינטרוול שמכיל את כל השורשים של p. אם $p_n \to p$, מתרגיל ישן נובע שיש התכנסות במ"ש על $[a,b]$ [מהוכחה קצת קומפקטי..] אזי $p_n \xrightarrow{u} p$ על $[a,b]$.

נשים לב ש p מחליף סימן n פעמים ב $[a,b]$ ולכן אם p_n מספיק קרוב ל p אז הוא מחליף סימן לפחות n פעמים ולכן בעל n שורשים שונים, כי לא יכולים להיות יותר מ n שורשים.

נגדיר: $\Psi: U \to V = \underbrace{\{(t_1,\dots,t_n) \mid t_i<t_j,\ i<j\}}_{\text{פתוחה}}$ כאשר $\Psi(a_0,\dots,a_{n-1}) = (t_1,\dots,t_n)$

כאשר $t_1,\dots,t_n$ השורשים השונים של $T(a_0,\dots,a_{n-1})$

אזי Ψ חח"ע ועל. נראה כי Ψ היא הומאומורפיזם מ U ל V.

נשים לב כי $\Psi = \varphi^{-1}\circ T$ כאשר $\varphi: V_1 \to V$

קבוצת הפולינומים ב $\mathbb{R}^n$ עם n שורשים שונים פתוחה

כאשר $\varphi^{-1}((t-t_1)\cdots(t-t_n)) = (t_1,\dots,t_n)$

מאחר ו T הומאומורפיזם מספיק להראות כי φ או φ^{-1} הומאומורפיזם.

ברור ש φ רציפה [φ^{-1} יותר עדין...]

כדי להוכיח ש φ הומאומורפיזם מ $V \to V_1$ מספיק להראות כי φ פתוחה [שימוש...]

ולשם כך מספיק להראות ש $(D\varphi)_u$ הפיך לכל $u\in V$. מתקיים

$$D\varphi_{(t_1,\dots,t_n)}(e_i) = \lim_{h\to 0}\frac{(t-t_1)\cdots(t-(t_i+h))(\dots)(t-t_n) - (t-t_1)\cdots(t-t_n)}{h} =$$

$$= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(t-t_j)$$

נגזרות חלקיות רציפות בכל נקודה ולכן $\varphi\in C^1$.

אם $t_i\neq t_j$ לכל $i\neq j$ אזי הוקטורים $Df_{(t_1,\dots,t_n)}(e_i)$ בת"ל, ולכן בסיס

ולכן $(Df)_{(t_1,\dots,t_n)}$ הפיך.

21/11/13 גיא

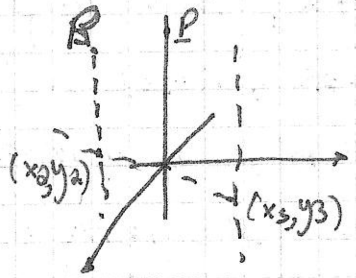
שיעור שבוע 6

המשך מקרה 2:

$x_1+x_2+x_3=0$, $y_1+y_2+y_3=0$ ו- $(x_1,x_2,x_3)\neq(3,3,3)$ אזי אם $\lambda_1\neq 3$

ונניח כי $x_1=0$, $y_1=0$ אז $x_2+x_3=0$

$y_2+y_3=0$ אז $(x_2,y_2)=-(x_3,y_3)$



אלו הן נקודות על מישור אנכי על
ציר z. [באופן סימטרי לכל λ_i וכו']

מקרה 3: $x_1+x_2+x_3=0$ ו- $y_1+y_2+y_3=0$ ואם $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$

אז $(3-3\alpha)z_k=z_1+z_2+z_3$ אז $z_1=z_2=z_3=\frac{z_1+z_2+3}{3-3\alpha}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$

$\alpha\neq 0$, אז $z_1=z_2=z_3=0$

אז כל הנקודות במישור xy כנדרש. ▨

תבנית ריבועית:

$x\in\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ נניח $a_{i,j}=a_{j,i}$ אז $f(x)=\langle Ax,x\rangle$

$\boxed{\text{כאשר } A \text{ סימטרית}}$

נחפש $\max\{f(x)\mid |x|=1\}$; פונ' האילוץ היא $g(x)=|x|^2-1$

Z_g מהווה קומפקטי. מקיים $\nabla g(x)=2x$

כמו כן מקיים

$\nabla f(x)=2A x$

$$|x+h|^2=|x|^2+\underbrace{2\langle h,x\rangle}_{\text{זו הנגזרת!}}+\underbrace{|h|^2}_{o(h)}$$

$$\langle A(x+h),x+h\rangle=$$
$$=\langle Ax,x\rangle+\langle Ax,h\rangle+$$
$$+\langle Ah,x\rangle+\underbrace{\langle Ah,h\rangle}_{o(|h|)}$$

$$\langle Ax,h\rangle=\langle x,A^Th\rangle=$$
$$=\langle x,Ah\rangle$$

אז עפ"י כופלי לגרנז'.

$\nabla f(x)=\lambda\nabla g(x)$

$2Ax=\lambda 2x\longrightarrow Ax=\lambda x$

אז נק' החשודות לקיצון הם x ו"ע של A

לכן: בנק' הקיצון

$f(x)=\langle Ax,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\lambda\langle x,x\rangle=\lambda|x|^2=\lambda$

נורמה אופרטורית:

$\|A\|_{op}:=\sup\{|Ax|:|x|=1\}$

זה לשאול max. כי A רציפה ; $|x|=1$ קומפקטי.

נשים לב:

$|Ax|^2=\langle Ax,Ax\rangle=\langle A^*Ax,x\rangle\longleftarrow$ זו כבר תבנית ריבועית שוב

$\longrightarrow$ אז המקס יהיה $\sqrt{}$ הע"ע הגדול ביותר של A^*A !!

21/11/13 ה 5

שיעור שבוע 6

אי-שוויון הולדר:

$$|x_1y_1+\dots+x_ny_n| \le (|x_1|^p+\dots+|x_n|^p)^{1/p}\cdot(|y_1|^q+\dots+|y_n|^q)^{1/q}$$

כך ש $p,q\in[1,\infty)$! $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ [עבור $2=p=q$ זה פשוט קושי שוורץ...]

פתרון:

נחפש $\max\left\{x_1y_1+\dots+x_ny_n \;\middle|\; \begin{matrix} x_1^p+\dots+x_n^p=1 \\ x_i\ge 0 \\ y_i\ge 0 \end{matrix}\right\}$ [~~אפשר~~ להניח שהסכום הוא 1 כי יש הומוגניות ולכן שכפול הקבוע זה לא משנה את שני האגפים!]

זה רק מגדיר את הסימן...

נרצה לחסום המקסימום ורק לקבל השוויון הנדרש.

נגדיר אילוץ $g(x)=x_1^p+\dots+x_n^p-1$; $f(x)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$

אינדוקציה על n [למקרה שהקודקוד על השפה!]

עבור $n=1$ זה ברור...

נניח $1<n$: אם אחד ה x_i מתאפס אז מאינדוקציה סיימנו. לכן אפשר להניח שלא ~~מתאפס~~ לא מתאפס.

נעשה כופלי לגרנז', נדרוש $\nabla f(x)=\lambda\nabla g(x)$;

$$\nabla f(x)=y$$

$$\nabla g(x)=(px_1^{p-1},\dots,px_n^{p-1})$$

לכן נדרוש $y=\lambda(px_1^{p-1},\dots,px_k^{k-1})$

לכן! $y_k=\lambda p x_k^{p-1}$

לכן! כדי לקבל ~~קיצון~~ נדרוש $x_k=C\cdot y_k^{\frac{1}{p-1}}$. כמו כן מתקיים מהאילוץ

שסכום 1: $C^p\sum y_k^{\frac{p}{p-1}}=1 \leftarrow C=\left(\sum y_k^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{1}{p}}$

לכן:

$$f(x)=\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^n x_ky_k=C\sum_{k=1}^n y_k^{\frac{1}{p-1}}y_k=C\cdot\sum_{k=1}^n y_k^{1+\frac{1}{p-1}}=$$

$$=C\cdot\sum_{k=1}^n y_k^{\frac{p}{p-1}}=\left(\sum_{k=1}^n y_k^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-1/p}\left(\sum_{k=1}^n y_k^{\frac{p}{p-1}}\right)=\left(\sum_{k=1}^n y_k^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{1/q}$$

לכן הערך המקסימלי הוא זה, לכן החסם תקף כי גם במקס' הוא חוסם ! לכן תמיד חוסם!

סנסיטיביות של האופטימום

נניח כעת ונשנה את האילוצים מאפס ! למשהו C ונראה איך האופטימום ישתנה.

$g_i(x)=C_i$: $\nabla f_{(x(c))}=\lambda_1(c)\nabla g_1(x(c))+\dots+\lambda_n(c)\nabla g_n(x(c))$!

ונתעניין ב $\frac{\partial}{\partial c_k}f(x(c))$ כלומר איך שינוי באחד האילוצים בקצת ישנה את ערך האופטימום.

$$\frac{\partial}{\partial c_k}f(x(c))=\left\langle\nabla f(x(0)),\frac{\partial x}{\partial c_k}\Big|_0\right\rangle \overset{\text{מגדל...}}{=} \left\langle\sum\lambda_{k(0)}\cdot\nabla g_k(x(0)),\frac{\partial x}{\partial c_k}\Big|_0\right\rangle=$$

מכלל השרשרת:

$$=\sum^n\lambda_l(0)\frac{\partial}{\partial c_k}g_l(x(c))=\lambda_k\ [\text{כולם מתאפסים חוץ מ } l=k]$$

כופלי לגרנז' הם הקצב של שינוי האופטימום עם שינוי האילוץ