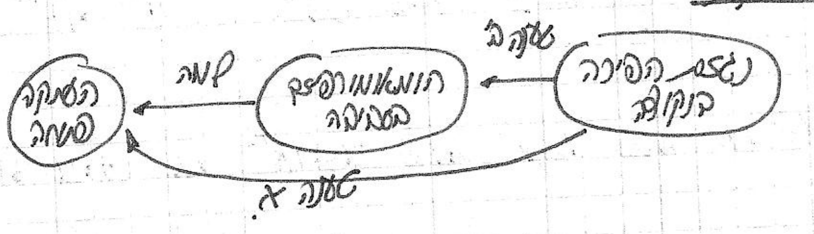
2/11/13 

## שיעור שבוע 5

תרשים הטענות:




שני צדדים של טענה א.

תרגיל: בשימוש בטענה א': תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. $f\in C^1(U\to\mathbb{R}^m)$ והאופרטור $(Df)_x$ הוא על $\mathbb{R}^m$ אז $f$ העתקה פתוחה.

תרגיל: בשימוש בטענה ב': תהי $x_0\in\mathbb{R}^n$ ו- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ גזירה בסביבת $x_0$ והנגזרת $(Df)$ ב-$x_0$. והאופרטור $(Df)_{x_0}$ הוא חח"ע, אז קיימת סביבה פתוחה חסומה של $x_0$ כך ש- $f|_{\overline{U}}$ הומאומורפיזם מ- $\overline{U}\to f(\overline{U})$

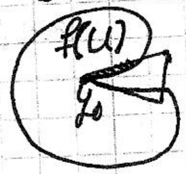
זה הפוך שלנו!

(*) תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה פתוחה של $x_0$ ו- $f:U\to\mathbb{R}^n$ גזירה ב-$x_0$ ו- $(Df)_{x_0}$ הפיכה אז $f(U)$ הוא לא סביבה של $f(x_0)$.

נגזרת בכיוון $h$

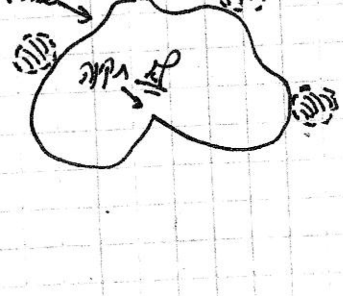
לכל $h\in\mathbb{R}^n$ נתבונן במסילה $\gamma_h(t)=f(x_0+th)$ כאשר $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ו- $\varepsilon$ מספיק קטן כך ש- $\gamma_h\subseteq U$. מתקיים $\gamma_h(0)=f(x_0)$ ו- $(D\gamma_h)_{(0)}=T(h)$ כאשר $T=(Df)_{x_0}$ ו- $T$ הפיך מההנחה, ולכן $T(h)$ הוא כל וקטור שהוא. כלומר ניתן לבחור $h$ כך ש- $T(h)$ הוא רצוני.

תרגיל: עבור $n=2$. צ"ל $f(U)$ חורג לא משולש $\overset{\text{פתוח}}{Y}$ עם קודקוד ב-$y_0$.
$y_0=f(x_0)$ ו- $U$ סביבה $\overset{\text{פתוחה}}{Y}$ של $x_0$, כך ש- $f$ גזירה ב-$x_0$ ו- $(Df)_{x_0}$ הפיכה.




תרגיל: יהי $\overset{\text{מימד}}{n}$ צ"ל ש- $f(U)$ חותך כל כדור פתוח של $y_0$ בשפה שלו. [עבור $f, U, y_0$ כנ"ל]

המשמעות של זה היא ש- $f(x_0)$ תהיה נקודה בפנים של $f(U)$ אבל יכול להיות שהיא נקודת שפה



12/11/13 $\boxed{\text{לכל } x_0!}$ 33

## המשך שיעור 2

<u>למה:</u> $f:U\to\mathbb{R}^n$ גזירה ב-$x_0$ ו-$(Df)_{x_0}$ הפיכה, אז ! $f(U)$ אין נקודות שפה תקינות. זה נובע מהתרגיל הקודם, כך שנבחר עבור נקודת השפה $y$ ונקבל את $x_0=f^{-1}(y)$.

נק' שפה תקינה זו נקודה של רכיב שפה של בשפה של שלא חותך את הפנים

(*) המטרה שלנו היא להראות ש-$f(x_0)$ תהיה נקודת פנים של $f(U)$! לכן נניח ש-$f(x_0)$ נק' שפה, ונחקור מה קורה במצב זה שנקבל סתירה. אז כרגע ראינו שהיא חייבת להיות לא תקינה, כי אין נק' שפה תקינות.

<u>למה:</u> תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וחסומה. $f:\overline{U}\to\mathbb{R}^n$ רציפה. אם $f$ הומאומורפיזם $\overline{U}\to f(\overline{U})$ ואין ל-$f(U)$ נקודות שפה תקינות אז $f(U)$ פתוחה.

<u>הוכחה:</u> נשים לב כי $\overline{U}=U\uplus\partial U$ [כי $U$ פתוחה]. כמו כן $\overline{U}$ ו-$\partial U$ קומפקטיות כי הן סגורות וחסומות. תהי $x_0\in U$ צ"ל ש-$y_0=f(x_0)$ נקודה פנימית של $f(U)$ ומכך נסיק פתיחות של $f(U)$.

נשים לב כי $f(\overline{U})=f(U)\uplus f(\partial U)$ כי $f$ חח"ע [כי הוא הומאומורפיזם] מתקיים: $f(\overline{U})$, $f(\partial U)$ הן קומפקטיות כתמונה רציפה של קומפקט. לפי ההגדרה $y_0\in f(U)$ ולכן $y_0\notin f(\partial U)$ כי האיחוד זר. נתבונן ב

$$\mathrm{dist}(y_0,f(\partial U))=\inf_{z\in f(\partial U)}\mathrm{dist}(y_0,z)>0$$

כי זה פונ' רציפה על הקומפקט ולכן מקבלת מינימום שהוא לא אפס.

נסמן מרחק זה ב-$2\varepsilon$.

לכן מתקיים שסביבת $\varepsilon$ של $y_0$ מוכלת ב-$f(U)$ - וזה יראה ש-$y_0$ נק' פנים של $f(U)$ כנדרש.

נניח בשלילה שלא, כלומר קיימת נקודה $a$ כך ש-$|y_0-a|<\varepsilon$ ו-$a\notin f(U)$

אז גם $a\notin f(\partial U)$ כי כל נקודה ב-$\partial U$ נמצאת למרחק $2\varepsilon$ מ-$y_0$.

לכן $a\notin f(\overline{U})$ ולכן $0<\delta=\mathrm{dist}(a,f(\overline{U}))$ [מאותו נימוק כמו קודם]

יש $y_1\in f(\overline{U})$ כך ש-$|y_1-a|=\delta$, אז $y_1\notin f(\partial U)$ כי $|y_0-y_1|\le|y_0-a|+|a-y_1|\le\varepsilon+\delta$

אבל נשים לב כי $y_0\in f(\overline{U})$ ולכן $y_1$, שהיא הקרובה ביותר ל-$a$ שנמצאת ב-$f(\overline{U})$ תהיה קרובה יותר מ-$\varepsilon$ ולכן $\delta\le\varepsilon$ ולכן $|y_0-y_1|\le 2\varepsilon$ ולכן $y_1\in f(U)$

12/11/13 34 

בסביבה של $a$ (פתוחה) אין נקודות מ $f(\bar{U})$ כי $y$ הקרובה ביותר.

אז $y$ הוא נקודה שפה תקינה, בסתירה. לכן $y_0$ נקודה פנימית של $f(U)$

טענה: $S_1, S_2$ מרחבים אפיניים $n$-ממדיים, $x_0 \in S_1$, $f: S_1 \to S_2$ גזירה מסדר 1 ב- $x_0$ והנגזרת רציפה ב $x_0$, ו- $(Df)_{x_0}: \vec{S_1} \to \vec{S_2}$ הפיכה.

אז קיימת סביבה פתוחה חסומה $U$ של $x_0$ כך ש $f|_{\bar{U}}$ הומאומורפיזם $\bar{U} \to f(\bar{U})$; $f$ גזירה ב $U$.

מקרה 1: מהו?

רפורמולציה לטענה פשוטה יותר.

הוכחה: נניח $x_0 = 0$ ו $f(x_0) = 0$. נבחר בסיסים מתאימים כך ש $T = (Df)_{x_0}$ תהיה מטריצת היחידה! [אפשר כי $T$ הפיכה אז נבחר בסיס $e_1, \dots, e_n$ ; מבסיס $Te_1, \dots, Te_n$]

ולכן לאחר בחירת הבסיס $S_1 = S_2 = \mathbb{R}^n$ ו- $T$ הוא הזהות.

לכן נשנה הטענה:

$V$ מרחב וקטורי, $f: V \to V$ גזירה מסביב לאפס והאופרטור $(Df)_0 = Id$ (כי $Df$ רציף בסביבת אפס)

אז קיימת סביבה פתוחה וחסומה $U$ של אפס כך ש $f|_U$ הומאומורפיזם $\bar{U} \to f(\bar{U})$; $f$ גזירה ב $U$.

תזכורת: להוכחת את 1 אז: בהינתן $\|Df\| \le M$ ב $[a,b]$; $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

צ"ל $|f(a) - f(b)| \le M|b-a|$ ע"י $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ כך ש

$g(y) := \langle u, y \rangle$ עבור $\|u\| = 1$ ולהשתמש ב 1 עבור $f \circ g$, ולבחור $u$ אופטימלי

הוכחה: לכל $\varepsilon$ יש סביבה $U_\varepsilon$ של $0$ ב $V$ כך ש $\|(Df)_x - id\| < \varepsilon$ (קמורה. נניח כדור) (נשים $V$ למרחב אוקלידי)

לכל $x \in U_\varepsilon$ [כי $Df$ רציפה באפס! ובאפס שווה ל $id$]

לכן לפי התרגיל

~~[illegible]~~

$$|(f(x) - x) - (f(y) - y)| \le \varepsilon |x - y|$$

לכל $x, y \in U_\varepsilon$. לכן $|(f(x) - f(y)) - (x - y)| \le \varepsilon |x - y|$

12/11/13 35 <u>תרגול שבוע 5</u>

<u>הגדרה:</u> תהי $f:U\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-$x_0$. אזי הוקטור $(\nabla f)_{x_0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$ נקרא הגרדיאנט.

<u>אזי מתקיים:</u>

$$(Df)_{x_0}(h)=\langle\nabla f_{x_0},h\rangle$$

<u>תרגיל:</u> $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, $f\in C^1(U)$ ; $|\nabla f_x|\leq M$ לכל $x\in U$

אזי אם $U$ קמורה אז $f$ ליפשיץ כלומר קיים $k$ כך ש

$|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$ לכל $x,y\in U$. מה אם $U$ אינה קמורה אזי עדיין השיטה.

<u>פתרון:</u> יהיו $x,y\in U$ אזי המסילה $\gamma(t)=(1-t)x+ty$ היא ב-$U$ מקמירות לכל $t\in[0,1]$

לכן נסתכל פונ' $g(t)=f(\gamma(t))$. $g$ דיפרנציאבילית ומתקיים ע"פ משפט לגרנז'

$$f(y)-f(x)=g(1)-g(0)=\underbrace{g'(c)}_{(Df)_{\gamma(c)}\cdot(y-x)}$$

$:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

לכן:

$$|f(y)-f(x)|=\langle\nabla f_{\gamma(c)},\overbrace{y-x}^{\text{וקטור}}\rangle$$

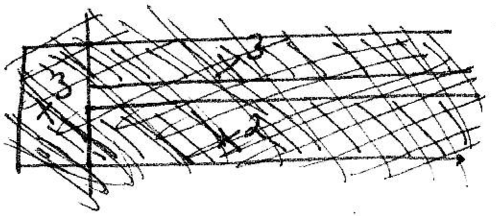
ומקושי שוורץ

$$|f(y)-f(x)|\leq\|\nabla f_{\gamma(c)}\|\|y-x\|\leq M\|y-x\|$$

כנדרש.

אם $U$ <u>לא</u> קמורה זה <u>לא</u> נכון.

[תוכרה פוגמאו]



<u>תרגיל:</u>

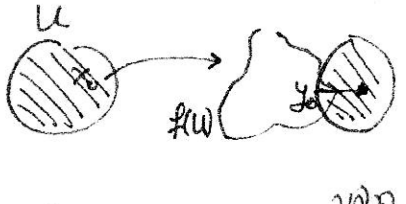
נתון: $f:U\to\mathbb{R}^n$ ; $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ; $f\in C^1(U\to\mathbb{R}^n)$ ; $(Df)_x$ הפיך לכל $x\in U$:

אזי $f$ פתוחה

כלומר לכל $V\subseteq U$ פתוח $f(V)$ פתוחה גם פתוחה

זאת הטענה המרכזית שמוכיחים בשיעור

<u>תרגיל 3ב:</u> תהי $U$ פתוחה, $x_0\in U$, $y_0=f(x_0)$ ונניח כי $f:U\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית בסביבה של $x_0$ והדיפרנציאל של בנקודה זו הפיך. צ"ל $f(U)$ מכיל $B$ כדור פתוח שהמרכז של מכיל את $y_0$.




<u>פתרון:</u> ידוע כי $f(x_0+h)=y_0+(Df_{x_0})(h)+o(\|h\|)$

יהי $B$ כדור שלפה מכיל את $y_0$ ונהי

$\xi$ וקטור המחבר בין מרכז הכדור ! $y_0$ בכיוון המרכז של הכדור.

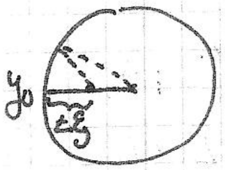
12/11/10 36

## המשך תרגול 5

מאחר $(Df)_{x_0}$ הפיך ! קיים $h$ כך ש $(Df)_{x_0}(h) = \xi$.

לכן: עבור סקלר $t$

$$f(x_0+th) = y_0 + (Df)_{x_0}(th) + \bar{o}(t) = y_0 + t\xi + o(t)$$ ← מהגדרת הדפרנציאל.



נשים לב כי אם הגורם השארית $o(t)$ קטן מ $t\xi$

אזי נקבל כי $y_0+t\xi+o(t)$ יהיה בתוך הכדור

מא"ש המשולש. לכן נבחר $t$ מספיק קטן כך ש

$$\|f(x_0+th) - y_0 - t\xi\| \le \frac{t\cdot\xi}{2}$$ ← אפשרי מזה שזה $o(t)$

ואז נקבל כי $f(x_0+th)$ בתוך הכדור. [צריך גם לדאוג ש $t$ קטן מספיק כך ש $U \ni x_0+th$

הכללה של המשפט

**תרגיל 3b1:** תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה $f\in C^1(U\to\mathbb{R}^m)$. אזי אם $(Df)_x$ הוא על לכל $x\in U$ אזי $f$ פתוחה. [$m\le n$ כי יש העתקה על]

**פתרון:**

נרצה להראות כי $f(U)$ פתוחה. נבחר נקודה ~~...~~ $y\in U$ ונרצה להראות ש $f(U)$ מכילה סביבה פתוחה של $f(y)$.

ונבנה $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ כך ש $(Df)_{y_0}\circ T$ הוא פונ' לינארית הפיכה מ $\mathbb{R}^m$ ל $\mathbb{R}^m$.

אז $f\circ T$ פונקציה מ $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ עם דפרנציאל הפיך ולכן עונה על דרישות המשפט ולכן פתוחה. [הדפרנציאל יהיה הפיך בנקודה ולכן גם בסביבה כי הנגזרת רציפה כי הפונ' גזירה ברציפות, והדטרמיננטה רציפה].

אז יהי $T$ אופרטור לינארי מ $\mathbb{R}^m$ ל $\mathbb{R}^n$ כך ש $(Df)_{y_0}\circ T$ הוא איזומורפיזם [רק במקרה ש $(Df)_{y_0}$ על!]

אזי מתקיים $x\longmapsto Tx+y$ מעבירה סביבת 0 ב $\mathbb{R}^m$ לסביבת $y$ ב $\mathbb{R}^n$; נשים לב כי זו העתקה גזירה ומתקיים שהנגזרת היא $T$, בכל נקודה. ב $\mathbb{R}^m$. לכן $f\circ H$ העתקה גזירה מ $H^{-1}(U)$ ל $f(U)$. בנקודה אפס מתקיים

$$(D(f\circ H))_0 = Df_y\circ T$$

מאחר וזה איזומורפיזם, גם בסביבה מספיק קטנה של אפס זה איזומורפיזם

## המשך תרגול 2

לכן בסביבה מספיק קטנה של 0 נקבל $D(f\circ H)$ הפיך ולכן $f\circ H$ פתוחה [מהמשפט בהרצאה]

אבל $U \supseteq Im(H|_G)$ כאשר $G$ היא סביבה מספיק קטנה של 0 מוכל בה $U$

ולכן $\underbrace{Im(f\circ H|_G)}_{\text{סביבה פתוחה של } f(y)} \subseteq f(W)$ בפרט! ולכן $f$ פתוחה כי $f(W)$ קיבלנו

פתוחה כי $f(W)$ מכילה סביבה פתוחה של $y$.

---

14/11/13

## שיעור שבוע 2

**המשך הוכחת המשפט:** [הוכחה של טענה ממקודם]

(*) סופרפוזיציה של העתקה ליניארית זו ההעתקה הליניארית עצמה

נניח שמצאנו סביבה $U_\varepsilon$ שבה זה מתקיים

$$|(f-id)(y)-(f-id)(x)| \le \varepsilon|y-x|$$

$$|f(y)-f(x)+x-y| \le \varepsilon|y-x|$$

מא"ש המשולש $\Delta$!

$$-\varepsilon|y-x| \le |f(y)-f(x)|-|y-x| \le \varepsilon|y-x|$$

$$(1-\varepsilon)|y-x| \le |f(y)-f(x)| \le (1+\varepsilon)|y-x|$$

לכן $f$ חח"ע! [כי אם $x\neq y$ נקבל $0<|f(y)-f(x)|$].

__נשים לב כי:__ אם $f(x_n)\to f(x)$ אז $|x-x_n| \le \frac{1}{1-\varepsilon}|f(x_n)-f(x)|$ ולכן $x_n\to x$

ולכן ההופכי רציפה ולכן זה הומאומורפיזם.

ולכן $f$ הומאומורפיזם $f:\bar{U}_\varepsilon \to f(\bar{U}_\varepsilon)$

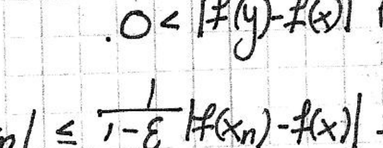
נשים לב כי עבור $x\in U_\varepsilon$ אז $(Df)_x$ הפיך כי $\|(Df)_x-Id\|\le\varepsilon$

לכן $|(Df)_x(h)-h|\le\varepsilon|h| \longrightarrow (1-\varepsilon)|h| \overset{\Delta}{\le} |(Df)_x(h)| \overset{\Delta}{\le} (1+\varepsilon)|h|$

לכן $(Df)_x$ הפיך! [הגרעין שלו מאפס...]

וזה מוכיח את טענה ב' [הוכחנו המקרה הפרטי, וראינו למה זה מספיק למקרה הכללי]

__דוגמא:__ $f(x,y)=(x,y^2)$ אזי



אפס נקודה פנימית

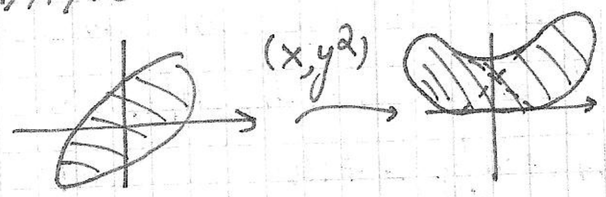
במקור אך לא בתמונה!! [בעיה!] כלומר $f$ לא פתוחה...

$U=\mathbb{R}^2$ ; $0\in f(W)$ לא נקודה פנים. זה כי

$$(Df)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x} & \frac{\partial y^2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{אם } y=0} \text{אז לא הפיך!}$$

14/11/13 3ע

# המשך שיעור 2




* $\varphi f(U) \neq f(\varphi U)$ הערה!

[שוב זה מתקיים כי הנגזרת של אופרטור הפיך...]

אם האופרטור הפיך אז מה שכתוב זה לא יכול לקרות.

<u>נזכר:</u> המטרה היא למקסם $f(x,y)$ בקבוצה $Z_g=\{(x,y) \mid g(x,y)=0\}$.

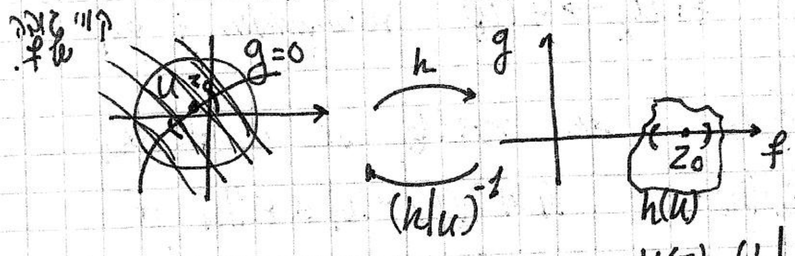
נניח כי בנקודה $(x_0,y_0)$ מתקיים $g(x_0,y_0)=0$ ו- $\nabla f(x_0,y_0)$ ו- $\nabla g(x_0,y_0)$ בת"ל. נרצה להראות שזה לא מקסימום.

<u>סימון:</u> $\boxed{z_0=f(x_0,y_0)}$

<u>טענה:</u> $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות בסביבה של $(x_0,y_0)$ ו- $g(x_0,y_0)$ וכמו כן $\nabla f(x_0,y_0)$, $\nabla g(x_0,y_0)$ בת"ל אז קיימת מסילה $\gamma$ ו- $\varepsilon>0$ כך ש: $\gamma:(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)\to\mathbb{R}^2$ ו- $f(\gamma(z))=z$ ו- $g(\gamma(z))=0$ לכל $z\in(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$.

<u>הוכחה:</u> נתבונן ב- $h(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$; היא גזירה ברציפות בסביבת $(x_0,y_0)$ כי $f$ ו- $g$ גזירות ברציפות סביב $(x_0,y_0)$. כמו כן מתקיים $(Dh)_{(x_0,y_0)}=$ [כי הוקטורים במטריצה הם הגרדיאנטים והם בת"ל לפי ההנחה] הפיך!

לכן קיימת סביבה $U$ של $(x_0,y_0)$ כך ש- $h(U)$ היא סביבה של $h(x_0,y_0)$ [משפט א' + ב'] ויש $h|_U$ הומאומורפיזם של $U$ לתמונה $h(U)$.




$$\gamma(z)=(h|_U)^{-1}(z,0)$$

היינו צריכים גם טענה א' וגם ב' כדי לקבל סביבה של $z_0$ כדי להגדיר מסילה כנדרש. (גיזור)

ונשים לב כי $(f(\gamma(z)),g(\gamma(z)))=h(\gamma(z))=(z,0)$, $z\in(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$ $\leftarrow$

$$\begin{cases} f(\gamma(z))=z \\ g(\gamma(z))=0 \end{cases}$$

לכן קיבלנו מה שרצינו!

<u>תוצאה:</u> מ"מ מהטענה נקבל ש- $(x_0,y_0)$ לא קיצון מקומי!

אנו הופכים רק את [illegible] של [illegible] 3 אז את ה[illegible] אנו הופכים

<u>נתבונן ב- $\mathbb{R}^3$:</u> $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$; שתי פונקציות אילוץ ונרצה

יש תקווה שנקבל עקום אילוץ ולא משטח.