

5/11/13

25

המשפט של ליבניץ

נסתכל ב- $C^1(U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ שם U מתחום פתוח במרחב $\mathbb{R}^n$.
 נגדיר: $f \in C^1(U) \iff f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ וקיימת וקטור $n \times m$ $Df(x)$ כך ש-

משפט ליבניץ

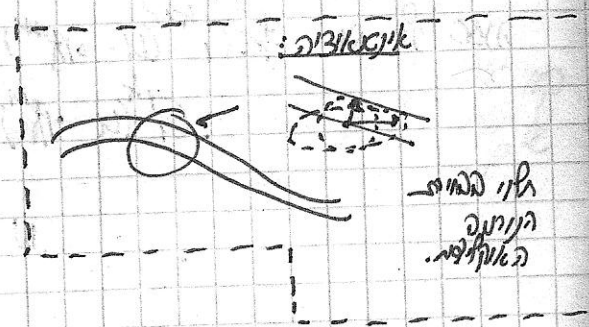
נסתכל ב- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח x_0 נקודה מסוימת. נגדיר $T = (Df)_{x_0}$ כמטריצה $n \times 1$.
 אז $T(h_1, \dots, h_n) = z_1 h_1 + \dots + z_n h_n$ שם $z_i = (Df_i)_{x_0}$ ו- $T(h) = \langle (z_1, \dots, z_n), (h_1, \dots, h_n) \rangle$

כאן $z_i = (Df_i)_{x_0}$ ו- $T(h) = \langle (z_1, \dots, z_n), (h_1, \dots, h_n) \rangle$

ונגדיר $\nabla f(x_0) = (z_1, \dots, z_n)$ ונקרא וקטור הגרדיאנט של f בנקודה x_0 .

אם $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ אז $\langle \nabla f(x_0), h \rangle = (Df)_{x_0}(h) = (D_h f)_{x_0}$

Q.S. $|D_h f|_{x_0} \leq |\nabla f(x_0)| |h|$
 נגזרת של משפט ליבניץ
 אם $|h|=1$ נקבל
 $|D_h f|_{x_0} \leq |\nabla f(x_0)|$



ולכן אם $h = \frac{1}{|\nabla f(x_0)|} \nabla f(x_0)$

אז הכיוון של הגרדיאנט זה הכיוון של עלייה הכי מהירה של הפונקציה ב- x_0 , וההפך.
 מרחקו של זה הנורמה הכי מהירה של x_0 . כאן k כיוון ממוצע לגרדיאנט אין
 עדיף ואין פסידה [בקירוב ליניארי]

משפט ליבניץ

משפט ליבניץ של ליבניץ.

$|f(x_0+h) - f(x_0)| = |(D_h f)_{x_0+\xi h}| \leq |h| \cdot \sup_{c \in (0,1)} |\nabla f(x_0+ch)|$

נסתכל ב- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ונניח $x_0 \in \mathbb{R}^n$. נגדיר $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ ו- $T = (Df)_{x_0}$

אז $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ וקיימת מטריצה $n \times m$ T כך ש-

$\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_m(x_0)$ הם ע"פ ליניארי

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

הנורמה

$T(h) = ((Df_1)_{x_0}(h), \dots, (Df_m)_{x_0}(h)) = (D_h f_1(x_0), \dots, D_h f_m(x_0)) =$

$= (\langle \nabla f_1(x_0), h \rangle, \dots, \langle \nabla f_m(x_0), h \rangle)$

אם $0 = c_1 \nabla f_1(x_0) + \dots + c_m \nabla f_m(x_0)$ אז $0 = c_1 \dots c_m$

5/11/13

26

המשפט השני

$$= C_1 \langle \nabla f_1(x_0), h \rangle + \dots + C_m \langle \nabla f_m(x_0), h \rangle = \langle T(h), C \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad \text{שם: המרחב}$$

$$= \langle C, \nabla f_1(x_0) + \dots + \nabla f_m(x_0), h \rangle = 0 \quad ! h \text{ כל}$$

$\mathbb{R}^m$ בו T שם $C \neq 0$! $\mathbb{R}^m \ni C \perp \text{Im}(T)$ פר
 $(*) \leftarrow (2)$ פר

בסוף הלכנו על T של B שם B לא נמצא כלום פרט לזו היחידה.

המשפט השלישי

נניח $k=0,1,\dots$ בדרגות קונסוס: $G^k(U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ שם
 נניח $f \in G^k(U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ $k \geq 1$ ונניח $G^0(U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ הן המרחב
 $G^k(U \rightarrow \mathbb{R}^m) \ni (D_h f)$ שם $h \in U$ כל

$N \ni i \geq 0$ שם $G^{i+1} \subseteq G^i$ הדרגות
 [מכיוון וקטורים]

מרחב קונסוס
 $\{e_1, \dots, e_n\}$
 כי כל וקטור
 שבו וקטור
 k
 נמצא
 נמצא
 וקטור

$$f \in G^2 \leftrightarrow \forall k: D_k f \in G^1 \leftrightarrow \forall h, k: D_h D_k f \in G^0 \quad \text{שם: פרט}$$

$$[2 \text{ דרגות}] \quad D_k D_h = D_h D_k \quad \text{שם: פרט}$$

נניח: $x_0 \in U$! $f \in G^2(U)$ שם h_1, h_2 כל (נניח D):
 $(D_{h_2} D_{h_1} f)_{x_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ [שם: וקטור וקטור...]

$$[D_{h_1} D_{h_2} = D_{h_2} D_{h_1}] \quad \text{שם: וקטור, וקטור}$$

$$h \mapsto (D_h D_h)(f)_{x_0} \quad \text{שם: וקטור (שם: וקטור וקטור)}$$

משפט השלישי

$$f(x_0 + zh) = f(x_0) + z(D_h f)_{x_0} + \frac{z^2}{2}(D_h D_h f)_{x_0} + o(|z|^2)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (D_h f)_{x_0} + \frac{1}{2}(D_h D_h f)_{x_0} + o(|h|^2)$$

27

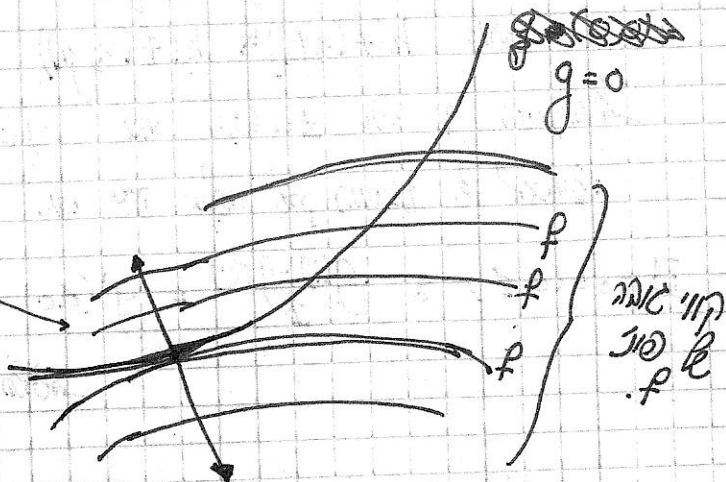
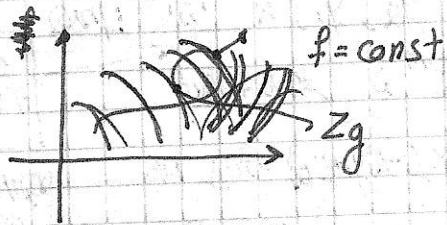
135N/C@1k1 nnn@ nnn@

* $z = f(x, y)$ פונקציה של שני משתנים

$$Z_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

המשפט הראשון למתקן f של התקופה Z_g ; כלומר f הוא תהליך

מחזורי חיים



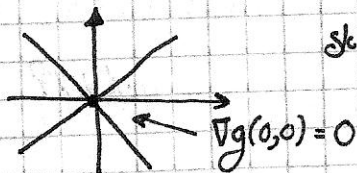
$\cdot g=0$ $\Rightarrow$ $k \in B \neq Q$ $\Rightarrow$ minimale

How @ your work, and how to Zg Ac

לא כה פשוט, נדמה ופשוט למצוא מקסימום.

$\frac{1}{2} \text{ mol Zn} \rightarrow 1 \text{ mol Zn}^{2+}$
 $\frac{1}{2} \text{ mol Zn} \rightarrow 1 \text{ mol Zn}^{2+}$

המחיר של הקטורה $\rightarrow$
 $\cdot g = 0$



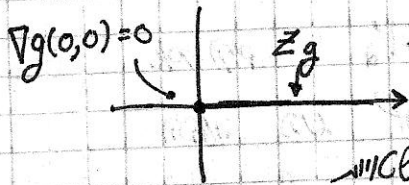
Sk $\underline{g(x,y) = x^2 - y^2} \quad (1) : \text{KNC(9)}$
 $\in C^1$

$$Z_g = [0, \infty) \times \{0\} \quad \text{sk} \quad G^1 \ni g(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & x \leq 0 \\ y^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

התקופה בין g ל- ∞

ונגזרת $f(x, y) = x$ יוצרת לקראת מיקומים f

מקור בציור המקור



$\nabla g \neq 0$! ∇g is perpendicular to the level set $g(x,y) = c$

$\nabla g(x,y) \neq 0 \leftarrow g(x,y)=0$ x,y בִּלְעֻמָּהּ נִשְׁמָר וְיִשְׁמָר

$g \in G^1$ pk : normal

sk $0 = g(x_0, y_0)$! $\nabla g(x_0, y_0) \neq \nabla f(x_0, y_0)$ pk

(x_0, y_0) קרן קיבול, אורח [קוטר קיבול] מקבל למידה של $\frac{1}{2}$ מ (הפרמטרים

המאמר מתייחס ל] P_k של המאמר כיון של P_k הוא המאמר הראשון שבו $g=0$ הוא

5/11/13

29

for $f = \det$. כחלק מהוכחה $f \circ T$ הוכחה

(*) - $D(\det)_I$

אל קו נוסף את המטרה החלקית $\epsilon_{i,j}$.

$$D(\det)_I(\epsilon_{i,j}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I + t \cdot \epsilon_{i,j}) - \det(I)}{t} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{(1+t)-1}{1} = 1 & i = j \end{cases}$$

הערה: $\epsilon_{i,j}$ היא מטריצה חסומה

$$D(\det)_I(x) = \sum \alpha_{i,j} D(\det)_I(\epsilon_{i,j}) = \sum \alpha_{i,i} = \text{trace}(x)$$

$$x = \sum \alpha_{i,j} \epsilon_{i,j}$$

המטרה היא להראות שההפרש בין המטריצה המקורית למטריצה החדשה הוא זניח.

הוכחה: A היא מטריצה חסומה

$$D(\det)_A : \det(A+h) - \det(A) =$$

$$= \det(A(I+A^{-1}h)) - \det(A) =$$

$$= \det(A) \cdot \det(I+A^{-1}h) - \det(A) = \det(A) [\det(I+A^{-1}h) - \det(I)] =$$

$$= \det(A) [\text{trace}(A^{-1}h) + o(|h|)]$$

הוכחה: f היא פונקציה חסומה וקווינטית $\frac{\partial}{\partial z} \big|_{z=0} (f(zh))$ היא הנגזרת של f ב-0.

ה h [היא פונקציה חסומה]. h היא מטריצה חסומה.

נניח שהפונקציה g היא פונקציה חסומה וקווינטית.

$$g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < \pi \\ -\theta & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot g(x,y) \quad [f \text{ היא פונקציה חסומה ב-}(0,0)]$$

$$\frac{f(zh) - f(0)}{z} = \begin{cases} \frac{g(h) \cdot |z|}{z} & z \geq 0 \\ \frac{-g(h) \cdot |z|}{z} & z < 0 \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}^2$$

אם g היא פונקציה חסומה וקווינטית, אז $D_h f(0,0)$ היא פונקציה חסומה וקווינטית.

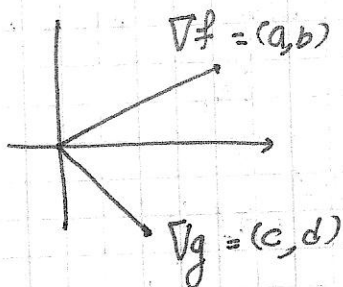
7/11/13

30

4 נוסחאות

משפט: הנגזרת של g בנקודה (x_0, y_0) היא וקטור הנגזרת של g בנקודה (x_0, y_0) .

$$Z_g = g^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

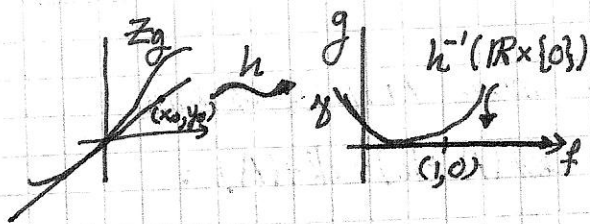


$$f(x, y) = ax + by + o(1,1)$$

$$g(x, y) = cx + dy + o(1,1)$$

$$h(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) ; h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$Z_g = h^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$$



$$\nabla g \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

$$T = (Dh)_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

המרחב הנגזר של T הוא $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\text{משפט}} \rightarrow \exists (x_0, y_0) : T(x_0, y_0) = (1, 0)$$

אם נבחר נקודה (x_0, y_0) כזו, אז $T(x_0, y_0) = (1, 0)$.

$$Z(x) = (f(x_0 + tx, y_0 + ty), g(x_0 + tx, y_0 + ty)) \leftarrow Z(x) = h(x_0 + tx, y_0 + ty)$$

$$Z(0) = 0 \text{ ולכן } g(x_0, y_0) = 0 ; f(x_0, y_0) = 0 \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$Z'(0) = (1, 0)$$

הנגזרת של Z בנקודה $(0, 0)$.

המשפט אומר שיש נקודה (x_0, y_0) כזו.

המשפט אומר שיש נקודה (x_0, y_0) כזו.

המשפט: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ היא פונקציה חלקה k פעמים.

המשפט: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ היא פונקציה חלקה k פעמים.

7/11/13

31

דבר 4

*) נשים $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כזו שיהיה f פונקציה רגולרית. (היא הפונקציה)

הצגה: יהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ כזו שיהיה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוח ויהיה $f|_U$ פונקציה רגולרית. $f(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ מקיים

הצגה: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה רגולרית פירושו $x \in U$ ויש סביבה U_x של x המקיימת $f(U_x)$ היא סביבה של $f(x)$. [זה הבעה סביבה פתוחה!]

הצגה: $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחים, $f: U \rightarrow V$ הפונקציה, f היא פונקציה רגולרית.

הצגה: יהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוח. נתון U_x של x ו- $f|_{U_x}$ פונקציה רגולרית. U מקיים כי f היא פונקציה רגולרית.

הצגה: (I) יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוח. $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה רגולרית. ויש $x \in U$ $(Df)_x$ היא איפסון הפיק $(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$ של f פונקציה.

הצגה: יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוח וחסום! $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ $[f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m]$ פונקציה רגולרית.

f רגולרית! U היא פתוחה כזו שיהיה $f|_U$ פונקציה רגולרית. f היא פונקציה רגולרית.

הפונקציה $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f|_U$ מקיים $x \in U$ $(Df)_x$ הפיק של $f|_U$ פונקציה רגולרית.

הצגה: (II) יהי $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה רגולרית! x_0 היא נקודה של Df רגולרית.

$(Df)_{x_0}$ הפיק של f קיים סביבה פתוחה וחסומה U של x_0 כך ש-

$f|_{\bar{U}}$ היא פונקציה רגולרית! $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f|_U$ פונקציה רגולרית! $(Df)_x$ הפיק של $f|_U$ $x \in U$ פונקציה רגולרית.