29/10/13 בס"ד

שיעור שבוע 3

* כל הנורמות שקולות ;

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|^p}=\frac{|f(x)|}{|x|^p}\cdot\underbrace{\left(\frac{|x|}{\|x\|}\right)^p}_{\text{חסום...}}$$

לכן כשמדברים על התכנסות אין חשיבות לאיזה נורמה אנחנו מתייחסים...

לכן אנחנו יכולים לעבוד בכל מרחב וקטורי שהוא [ממימד סופי] שמוגדרים לו נורמה.

תרגיל:

תהי $f:S_1\to S_2$ מרחבים אפיניים ; $x_0\in S_1$; אז f רציפה ב x_0 אמ"מ $f(x_0+\cdot)-f(x_0)\in\bar{o}(1)$: $\vec{S_1}\to\vec{S_2}$ כי (x_0+h) זה נקודה ב S_1

$\vec{S_1}\ni h\mapsto f(x_0+h)-f(x_0)$ ולכן $f(x_0+h)$ זה נקודה ב S_2.

נגזרת

הגדרה: אופרטור לינארי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ הוא הנגזרת ב x_0 של הפונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ אם $f(x_0+\cdot)-f(x_0)-T\in\bar{o}(\|\cdot\|)$ או במפורש

אחרת :

$$f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)=\bar{o}(|h|) \quad *$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+T(h)+\bar{o}(|h|) \quad *$$

$$f(x)=f(x_0)+T(x-x_0)+\bar{o}(|x-x_0|) \quad *$$

טענה: הנגזרת יחידה. כי אם יש שתיים שונות, אז ההפרש ביניהם הוא $\bar{o}$ רק של הנורמה, אבל ההפרש לינארי, ולכן ההפרש הוא אפס, לכן הם שוות.

* סימון: אם f גזירה ב x_0, נסמן את הנגזרת ב x_0 : $T=(Df)_{x_0}$

נשים לב כי $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$ ולכן T הוא למעשה מטריצה $m\times n$ מעל $\mathbb{R}$. אופרטורים לינאריים

* פונקציית הנגזרת [אם קיימת נגזרת בכל המרחב] כלומר; $Df:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$

לכל נקודה מתאימים אופרטור לינארי/מטריצה $m\times n$.

תרגיל: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ גזירה ב x_0 אמ"מ קיים הגבול $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ונסמן זאת $\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}$

29/10/13 יז

המשך שיעור 3

* הנגזרת היא אופרטור לינארי.

* טענה: $(Df)_0 = f \longleftrightarrow f$ לינארית.

כלומר $(Df)_0(h) = f(h)$

בתרגיל 1: $f' = f$
אמ"מ $f(x) = c\cdot e^{x}$
כאן לעומת זאת: $(Df)_x(1) = f(x)$

הגדרה: יהי $f : S_1 \to S_2$ ו- $x_0 \in S_1$ אז

$$\underbrace{f(x_0+\cdot) - f(x_0) - T(\cdot)}_{\vec{S_1} \to \vec{S_2}} \in o(|\cdot|)$$

(נגזרת למרחבים אפיניים)

כאשר $T : \vec{S_1} \to \vec{S_2}$;

אם נבחר $x_0 = 0$ ונתפוס את S_2 כמרחב וקטורי ו- $f(x_0) = 0$ ב- S_2. נקבל כי $f(\cdot) - T(\cdot) \in \bar{o}(|\cdot|)$

כלומר פונ' גזירה אם היא קרובה עד כדי הנורמה להעתקה לינארית.

(לומר ששכח את שמרחב וקטורי)

לינאריות הנגזרת: f, g : $S \to V$ (וקטורי) (אפיני) גזירות ב- x_0 אז

$af + bg$ גזירה ב- x_0 ו- $D(af+bg)_{x_0} =$

$= aD(f)_{x_0} + bD(g)_{x_0}$

* מרחב אפיני זה מרחב וקטורי "ששכח" איפה ראשית הצירים

הוכחה:

נבחר את x_0 להיות נק' הראשית ונת' S מרחב וקטורי. אז f גזירה ב- x_0 ולכן

$f - f(0) - S \in \bar{o}(|\cdot|)$; $g - g(0) - T \in \bar{o}(|\cdot|)$ כאשר $S = D(f)_{(0)}$, $T = D(g)_{(0)}$

ולכן נקבל:

$$(af+bg) - (af(0) + bg(0)) - (aS + bT) =$$

$$= a\underbrace{(f - f(0) - S)}_{\in \bar{o}(|\cdot|)} + b\underbrace{(g - g(0) - T)}_{\in \bar{o}(|\cdot|)} \longrightarrow \in \bar{o}(|\cdot|)$$

ומלינאריות הגבול קיבלנו הנדרש.

* חשוב לזכור: ראשית הצירים מתייחסת רק להפרש בין שתי נקודות! לכן במרחב אפיני אין חיבור של נקודות.

כפליות הנגזרת: $f, g : S \to \mathbb{R}$ גזירות ב- x_0 אז:

$$D(fg)_{x_0} = f(x_0)D(g)_{(x_0)} + D(f)_{(x_0)}g(x_0)$$

נבחר את הראשית להיות x_0. אז

ומתקיים:

$$\left.\begin{aligned} f - f(0) - S &\in \bar{o}(|\cdot|) \\ g - g(0) - T &\in \bar{o}(|\cdot|) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} f &= f(0) + S + \tilde{f} \\ g &= g(0) + T + \tilde{g} \end{aligned}$$

קומבינציה אפינית כן מוגדרת במרחב אפיני בתנאי שסכום המקדמים זה 1

$$fg - f(0)g(0) = (f(0) + S + \tilde{f})(g(0) + T + \tilde{g}) - f(0)g(0)$$

המשך הוכחה:

$$= (f(0)T + g(0)S) + \underbrace{f(0)\tilde{g} + g(0)\tilde{f} + (S+\tilde{f})(T+\tilde{g})}_{\in \bar{o}(1\cdot 1)}$$

נשים לב שמכפלה של שני או יותר זה גם קטן, כי הנורמה בריבוע

(*) אפשר להכליל על פונ' $S \to E$ שמתקבלות במכפלה הפנימית ב E ולהוכיח טענה דומה.

B השרשרת:

$$x_0 \in S_1 \xrightarrow{f} S_2 \xrightarrow{g} S_3$$

אם $gf: S_1 \to S_3$! f גזירה ב x_0 ! g גזירה ב $f(x_0)$.

אז $g \circ f$ גזירה ב x_0 !

$$D(g\circ f)_{x_0} = D(g)(f(x_0)) \circ D(f)(x_0)$$

הרכבה של אופרטורים לינאריים.

הוכחה: נעתיק את S_1 למרחב הקווי כך ש $x_0=0$; את S_2 נעתיק את $f(x_0)$ להיות האפס, ואת S_3 נעתיק ע"י $g(f(x_0))=0$.

נתון:

$$\left.\begin{array}{l} f - S \in \bar{o}(1\cdot 1) \\ g - T \in \bar{o}(1\cdot 1) \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} S = D(f)_{(0)} \\ T = D(g)_{(0)} \end{array}$$

ונראה ש $g\circ f - T\circ S \in \bar{o}(1\cdot 1)$.

$$g\circ f - T\circ S = g\circ f - T\circ f + T\circ f - T\circ S = \underbrace{(g-T)}_{\in \bar{o}(1\cdot 1)} \circ \overset{\in \bar{o}(1)}{f} + T\circ \underbrace{(f-S)}_{\in \bar{o}(1\cdot 1)} \in \bar{o}(1\cdot 1)$$

(*) אם $x \mapsto Ax+b$ אז $D(f)(x_0) = A$ [בנגזרת הקודמת כי הפונקציה לינארית]

29/10/13 19

המשך שיעור 3

נגזרת כוונית, נגזרת לאורך וקטור

יהיו V_1, V_2 מרחבים וקטורים. $f: V_1 \to V_2$! $V \subseteq V_1$ תת מרחב. אם f גזירה ב x_0 אז $f|_V$ [נניח $x_0 \in V$] גם גזיר ב x_0.

ומתקיים

$$D(f|_V)(x_0) = D(f)(x_0)|_V$$

עכשיו נניח כי $\dim V = 1$ אזי $V = \{th : t \in \mathbb{R}\}$ עבור h וקטור כלשהו.

אזי $f|_V$ הוא פונקציה של משתנה אחד; $f(x_0+th) = \tilde{f}(t)$

כלומר יתקיים: $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ ואז

$$\tilde{f}'(0) = \lim_{t \to 0} \underbrace{(f(th) - f(0))}_{\text{זהו וקטור...}} \cdot \frac{1}{t} \in \mathbb{R}^m$$

נזכר כי f גזירה ב x_0; אזי

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + D(f)(x_0)h + \bar{o}(|h|)$$

אזי עבור h קבוע כלשהו נקבל:

$$f(x_0+th) = f(x_0) + \underbrace{D(f)(x_0)th + \bar{o}(|th|)}_{tD(f)(x_0)h + \bar{o}(|t|)}$$

אזי

$$\tilde{f} = \lim_{t \to 0} (\tilde{f}(th) - \tilde{f}(0)) \cdot \frac{1}{t} = D(f)(0)(h)$$

ונסמן זאת $D(f)(x_0) \cdot h = D_h(f)_{x_0}$

או לחילופין נסמן $\nabla_h f(x_0)$;

⊛ לחילופין נתבונן במסילה $\gamma(t) = x_0 + th$; אז $f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$ ואז

$$D(f \circ \gamma)(0) = D(f)_{\underbrace{\gamma(0)}_{x_0}} \circ D(\gamma)_{(0)} = D(f)(x_0) \circ D(\gamma)_0$$

לכל $u \in \mathbb{R}$: $uh = D(\gamma)(0)(u)$

אזי

הדיפרנציאל בנקודה אפס

$$\overline{D(f \circ \gamma)_{(0)}}(u) = D(f)_{x_0}(uh) = u \cdot D(f)_{x_0} h$$

⊛ הנגזרת הכוונית הינה לינארית [בגלל הוקטור שאנו צריכים לאורכו]

נניח כי $m = 1$ אז $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ואז $D(f)_{x_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ לינארית.

ונניח שהיא אינה אפס, לכן מוגדר על מישור שבו $D(f)_{x_0} = 0$

ומצד אחד שלו הוא חיובי ומצד שני שלילי. [כלומר הוא מחלק את המרחב לשני חלקים]

29/10/13 20 (רציפה)

תרגול שבוע 3

תרגיל: תהי G פתוחה ו-$x\in G$; נגדיר

$$U_x=\{y\in G \mid \text{קיימת מסילה (רציפה) המחברת את } x \text{ ו-} y \text{ שמוכלת ב-} G\}$$

הוכיחו ש-U_x פתוחה ו-$G\setminus U_x$.

הוכחה:

תהי $y\in U_x$; מאחר ו-G פתוחה ו-$y\in G$ קיים כדור $B(y,\delta)\subseteq G$; אזי
לכל $z\in B(y,\delta)$ מתקיים $z\in U_x$ כי ניתן לחבר את x ו-z ע"י
שרשור של המסילה בין x ו-y והקו הישר בין y ו-z [שמוכל ב-$B(y,\delta)$]
לכן U_x פתוחה.
באותו האופן מוכיחים כי $G\setminus U_x$ פתוחה

מסקנה: כל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$ היא איחוד בן-מנייה לכל היותר של קבוצות קשירות מסילתית.

הוכחה: ניקח קבוצה צפופה בת-מנייה בתוך G למשל $A=\mathbb{Q}^n\cap G$ ונתבונן בקבוצות A_x
שהן $A_x=\{y\in U \mid \text{יש מסילה ב-} U \text{ בין } x \text{ ו-} y\}$ לכל $x\in A$.

לכן $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_{x_n}=G$ איחוד של קבוצות קשירות מסילתית זרות.

תרגיל:

כל קבוצה פתוחה וקשירה ב-$\mathbb{R}^n$ היא קשירה מסילתית. [קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת קשירה אם לא קיימות קבוצות פתוחות U,V כך ש-$A\cap V\neq\emptyset$; $A\cap U\neq\emptyset$ וגם $U\cap V=\emptyset$ ו-$A\subseteq U\cup V$]

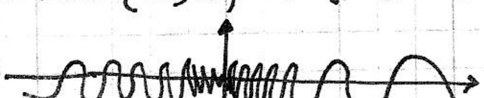
(*) קשירות מסילתית זה שבין כל שתי נקודות יש מסילה.

הוכחה: תהי U פתוחה וקשירה ו-$x\in U$; אזי ראינו
כי U_x [כפי שהגדרנו קודם] ו-$U\setminus U_x$ הן פתוחות
וברור כי $U=U\cup U\setminus U_x$ וברור שהן זרות, לכן אחת מהן ריקה, אבל
$U_x\neq\emptyset$ כי $x\in U_x$ ולכן $U_x=U$ ולכן הוא קשירה מסילתית.
כי ניתן להגיע מכל איבר ל-x במסילה...

כי הוא קשירה

(*) באופן כללי קשירות מסילתית $\longrightarrow$ קשירות אבל ההיפך לא נכון.

$A=\{(0,0)\}\cup\{(x,\sin 1/x)\mid x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ קשירה אך לא קשירה מסילתית.



המשך תרגול שבוע 3

דיפרנציאביליות:

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ גזירה ב x_0 אם קיים $(Df)_{(x_0)}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(Df)_{(x_0)}(h)+\bar{o}(|h|)$$ כאשר $h\to 0$

תרגיל:

הוכיחו את כלל מכפלת הנגזרת לפי $\langle f,g\rangle$ כאשר $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

פתרון: נניח כי f,g דיפרנציאביליות ב x_0. אזי מתקיים:

$$\langle f(x_0+h),g(x_0+h)\rangle-\langle f(x_0),g(x_0)\rangle=\langle f(x_0+h)-f(x_0),g(x_0+h)\rangle$$
$$+\langle f(x_0),g(x_0+h)-g(x_0)\rangle=\langle Df_{(x_0)}(h)+\bar{o}(|h|),g(x_0)+\bar{o}(1)\rangle$$
$$+\langle f(x_0),Dg_{(x_0)}(h)+\bar{o}(|h|)\rangle=\langle Df_{(x_0)}(h),g(x_0)\rangle+\langle Df_{(x_0)}(h),\bar{o}(1)\rangle$$
$$+\langle\bar{o}(|h|),g(x_0)+\bar{o}(1)\rangle+\langle f(x_0),Dg_{(x_0)}(h)\rangle+\langle f(x_0),\bar{o}(|h|)\rangle=$$
$$\langle f(x_0),Dg_{(x_0)}(h)\rangle+\langle Df_{(x_0)}(h),g(x_0)\rangle+\bar{o}(|h|)$$

מרציפות g

וזו בדיוק הנגזרת של המכפלה הפנימית. ■

(*) $(1)\cdot O(|h|)$ $\bar{o}(|h|)$

תזכורת: להתרגל לסימון $O,\bar{o}$ וכו'

תרגיל: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$; $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ נניח כי בסביבת x_0 ובסביבת y_0 כאשר $y_0=f(x_0)$ מתקיים $f(g(y))=y$ וגם $g(f(x))=x$.

שאלה: האם נובע $m=n$? לא! סתם פונ' לא מבדילה בין $\mathbb{R}^2$ ו $\mathbb{R}^3$ כי יש פונ' חח"ע ועל משוויון עוצמות, ולכן יש פונ' הפיכה מ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ וכו'.

האם הטענה נכונה כאשר f ו g רציפות ב x_0 ו y_0 בהתאמה?

לא! ניקח את $\mathbb{R}^3$ ו $\mathbb{R}^2$ ונתבונן על ספירות $\mathbb{R}^3\supseteq S^2_R=\{x^2+y^2+z^2=R\}$ ו $\mathbb{R}^2\supseteq S^1_R=\{x^2+y^2=R\}$; ברור שהקבוצות הללו שוות עוצמה ולכן יש פונ' חח"ע ועל ביניהן עבור R נתון, ואת אפס נעביר לאפס, ושם הוא תהיה רציפה באופטימי... לכן $m\neq n$ ועדיין יש פונ' חח"ע ועל רציפה בנקודה.

(*) הוכיחו כי אם f ו g דיפרנציאביליות ב x_0 ו y_0 בהתאמה אז $m=n$!

הוכחה: מאחר ובסביבת x_0 $g\circ f$ הוא הזהות אזי מתקיים ע"פ כלל השרשרת

$$D(g\circ f)_{(x_0)}=D(g)_{f(x_0)}\circ D(f)_{(x_0)}=(ID)_n$$

ולכן $m\geq n$.

כי $D(f)_{(x_0)}$ חח"ע. כמו כן אם נרכיב בכיוון ההפוך נקבל $n\geq m$ ולכן שוויון]

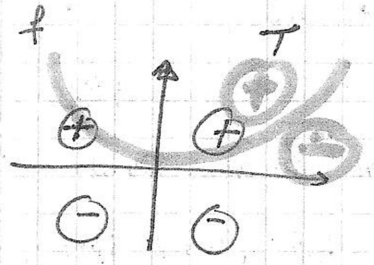
31/10/13 22

<u>שיעור שבוע 3</u>

⊛ אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ו- $D(f)_{x_0}=T\neq 0$ אז $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ על.

נחלק את המרחב ל $\{Tx>0\}$; $\{Tx<0\}$

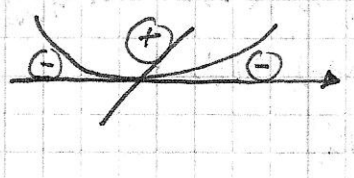
<u>⊛ דוגמא:</u>



$f(x,y)=y-ax^2$; $T(x,y)=y$ מקרב לינארי:

כי $D(f)=\begin{pmatrix}-4x\\1\end{pmatrix}\to D(f)_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=y$

<u>דוגמא נגדית:</u> מראה שלפי הסימן של הקירוב הלינארי לא תמיד ניתן לקבוע את הסימן של הפונ'.



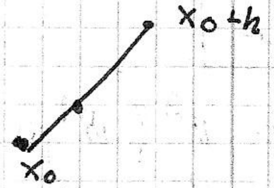
⊖ רק הקטע הקריטי עושה בעיה!

גם הקטע הזה מאונך זה ישמור סימן.

<u>משפט ערך הביניים של לגרנז':</u>

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $x_0,h\in\mathbb{R}^n$ ונניח ש f גזירה אז קיים $c\in(0,1)$ כך ש

$$D_h(f)_{(x_0+ch)} = f(x_0+h)-f(x_0)$$



<u>הוכחה:</u> נתבונן ב $\varphi(c)=f(x_0+ch)$; $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$

אז
$$\varphi'(c)=(Df)_{x_0+ch}(h)=(D_hf)_{x_0+ch}$$

ונשתמש במשפט ערך הביניים החד-מימדי.

<u>נגזרות חלקיות:</u> [לא דורשים גזירות של פונקציה כולה]

$\boxed{\text{הנגזרת החלקית ה-}k\text{ בנקודה } (x_1,\dots,x_n)}$

$$(D_kf)_{(x_1,\dots,x_n)} := \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(f(x_1,\dots,x_{k-1},x_k+t,x_{k+1},\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)\right); \quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

⊛ זה כמו הנגזרת הכיוונית לאורך e_k

<u>קשר בין דיפרנציאל לנגזרות חלקיות:</u>

$$(D_kf)_{x_0}=(D_{e_k}f)_{x_0}=(Df)_{x_0}(e_k)=Ae_k$$

$$A=(Ae_1|Ae_2|\dots|Ae_n)$$

31/10/13   23

המשך שיעור 3

אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ אזי $f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$

$T_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $T(x)=(T_1(x),\dots,T_m(x))$

ולכן:

$$Ax = (\;A\;)(x) \longrightarrow A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\A_m\end{pmatrix}$$

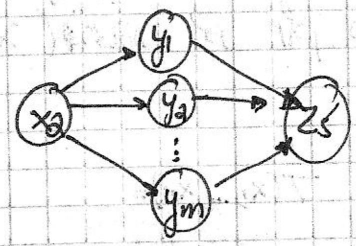
ולכן מתקיים:

אם A הדיפרנציאל של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ אז

$$A=\begin{pmatrix}D_1f_1 & D_2f_1 & \cdots & D_nf_1\\ \vdots & & & \vdots \\ D_1f_m & D_2f_m & \cdots & D_nf_m\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

(*) **כלל השרשרת:** — ומטרתו יהיה לכפול את המטריצות.

$$\frac{\partial z_s}{\partial x_2}=\frac{\partial z_s}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial z_s}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_2}$$



טענה: יהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$; $x_0\in\mathbb{R}^n$; D_kf קיימת בסביבה של x_0 ורציפות ב x_0 ; אזי f גזירה ב x_0 [כלומר קיים $(Df)_{x_0}$] והמטריצה המייצגת את $(Df)_{x_0}$ היא בדיוק מטריצת הנגזרות החלקיות.