

7/1/14

98

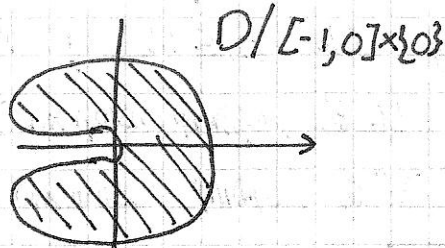
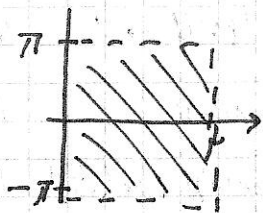
המסלול 13

המסלול: נח יעל המסלול מהיר אולימפיק

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$0 < r < 1$$

$$-\pi < \theta < \pi$$



ובה המסלול המעגל הוא למעשה של המסלול ע"י חסם של המסלול וזהו הפירמידה.

המסלול: ממוצע של פונקציה אינטגרלית $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ בקבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$

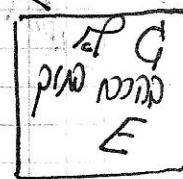
$$\frac{\int_E f}{\int_E 1} \quad \text{כאשר} \quad \mu(E) > 0$$

המסלול: נחיה של קבוצה E הוא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ כך שהממוצע של פונקציה אינטגרלית

בקבוצה E מקיים את המסלול $f(G)$!

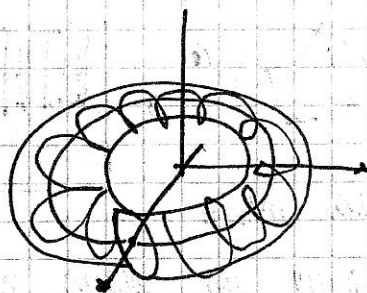
כך נראה

$$G = \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E x_1 dx, \dots, \frac{1}{\mu(E)} \int_E x_n dx \right)$$



אם נחיה G של מקרים של פונקציה אינטגרלית, לחיוב $f(x) = x_i$

אם נחיה G של פונקציה אינטגרלית של המסלול.



המסלול $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \{ (x, z) \mid (x-R)^2 + z^2 = r^2 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

המסלול המעגל המעגל x, z .

$$\tilde{\Omega} = \{ (x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

זהו המסלול של המעגל המעגל x, z של המסלול $\mathbb{R}^3$.

$$2\pi r^2 R \leftarrow \pi r^2 \cdot 2\pi R$$

המסלול המעגל המעגל x, z .

המסלול המעגל המעגל x, z .

זהו המסלול של המעגל המעגל x, z .

המסלול: למעשה של המסלול המעגל המעגל x, y .

7/1/14

99

מבחן שטורב

⊖ הוכחה של פונקציה קבוצה:

נניח $\tilde{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אז $F([a,b]) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$ כן קבוצה F וכן $\tilde{F}' = f$ אם

9/1/14
מבחן שטורב

$$\frac{F([x, x+h])}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x); \quad \frac{F([x-h, x])}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

ובאופן סימטרי נקבל

$$\frac{F([x-\varepsilon, x+\varepsilon])}{\mathcal{V}([x-\varepsilon, x+\varepsilon])} \rightarrow f(x)$$

$$\frac{F(B)}{\mathcal{V}(B)} \xrightarrow{B \rightarrow x} f(x)$$

⊖ הוכחה של פונקציה קבוצה, חזקה. כן לכל B יהיה P חזקה P של B

$$F: B \rightarrow \mathbb{R}; \quad F(B) = \sum_{C \in P} F(C)$$

⊖ הוכחה של תיבה: $B = [s_1, t_1] \times \dots \times [s_n, t_n]$ אז $\alpha(B)$ (גובה התיבה)

$$\alpha(B) = \frac{\max(t_1 - s_1, \dots, t_n - s_n)}{\min(t_1 - s_1, \dots, t_n - s_n)}$$

⊖ הוכחה של תיבה: $\alpha(B) \rightarrow 1; \mathcal{V}(B) \rightarrow 0$ אז $F'(x) = \lim_{B \rightarrow x} \frac{F(B)}{\mathcal{V}(B)}$ מה שהלכנו

כך $x \in B$ כל המסלול $\alpha(B) \rightarrow 1; \mathcal{V}(B) \rightarrow 0$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך לכל תיבה B המקיימת $\alpha(B) \leq 1 + \delta$ ו- $\mathcal{V}(B) < \delta$!

$$\left| \frac{F(B)}{\mathcal{V}(B)} - f'(x) \right| \leq \varepsilon$$

⊖ הוכחה של תיבה: $\alpha(B) \leq 1 + \delta$ אז $\mathcal{V}(B) < \delta$

⊖ הוכחה של תיבה: $\alpha(B) \leq 1 + \delta$ אז $\mathcal{V}(B) < \delta$

⊖ הוכחה של תיבה: $\alpha(B) \leq 1 + \delta$ אז $\mathcal{V}(B) < \delta$

$$* F'(x) = \liminf_{B \rightarrow x} \frac{F(B)}{\mathcal{V}(B)}$$

⊖ הוכחה של תיבה: $\alpha(B) \leq 1 + \delta$ אז $\mathcal{V}(B) < \delta$

⊖ הוכחה של תיבה: $\alpha(B) \leq 1 + \delta$ אז $\mathcal{V}(B) < \delta$

$$\int_B |f - g| = 0 \quad B \text{ תיבה} \quad f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

7/1/14

100

13 ביטוי

הפונקציה $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה ממשית. $F(B) = \int_B f$ היא פונקציה ממשית. F^+ היא פונקציה ממשית. F^- היא פונקציה ממשית.

הפונקציה f היא פונקציה ממשית. F^+ היא פונקציה ממשית. F^- היא פונקציה ממשית.

הפונקציה f היא פונקציה ממשית. F^+ היא פונקציה ממשית. F^- היא פונקציה ממשית.

הפונקציה f היא פונקציה ממשית. F^+ היא פונקציה ממשית. F^- היא פונקציה ממשית.

$$\int_B f^+ \downarrow \int_B f$$

$$\int_B |f - f^+| = \int_B f^+ - f \leq \int_B f_L^+ - f = \lim_{L \rightarrow \infty} (\int_B f_L^+ - \int_B f) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_B f_L^+ - \int_B f = 0$$

הפונקציה f היא פונקציה ממשית. F^+ היא פונקציה ממשית. F^- היא פונקציה ממשית.

הפונקציה f היא פונקציה ממשית. F^+ היא פונקציה ממשית. F^- היא פונקציה ממשית.

$$F(B) = \int_B f \leq \nu(B) \sup_B f \leq \int_B f_L^+ \leq \nu(B) \sup_B f_L^+$$

$$\frac{F(B)}{\nu(B)} \leq \sup_B f \leq \sup_B f_L^+ \quad \text{כאשר } B \rightarrow x$$

$$\limsup_{x \rightarrow B} \frac{F(B)}{\nu(B)} \leq \limsup_{B \rightarrow x} (\sup_B f_L^+) = f_L^+(x) \left[\begin{array}{l} \text{כאשר } B \rightarrow x \\ \text{הפונקציה } f_L^+ \end{array} \right]$$

$$f^-(x) \leq f^+(x) \leq f^+(x) \leq f^+(x)$$

הפונקציה f היא פונקציה ממשית. F^+ היא פונקציה ממשית. F^- היא פונקציה ממשית.

7/1/14

10,

כחלק מלימוד 13

אנחנו: F פונקציה חתומה על B ממוקדת

$$\inf_B F \leq F(B) \leq \sup_B F$$

(*) פונקציה F חתומה על B ממוקדת

אם F פונקציה חתומה על B ממוקדת

$$\inf_B F \leq F(B) \leq \sup_B F$$

אם P חתומה על B אז P חתומה ממוקדת

$$\min_{C \in P} \frac{F(C)}{\mathcal{V}(C)} \leq \frac{F(B)}{\mathcal{V}(B)} \leq \max_{C \in P} \frac{F(C)}{\mathcal{V}(C)}$$

$$a \mathcal{V}(C) \leq F(C) \leq b \mathcal{V}(C)$$

אם $a \leq \frac{F(C)}{\mathcal{V}(C)} \leq b$

$$a \sum_{C \in P} \mathcal{V}(C) \leq \sum_{C \in P} F(C) \leq b \sum_{C \in P} \mathcal{V}(C)$$

$$a \mathcal{V}(B) \leq F(B) \leq b \mathcal{V}(B)$$

הוכחה:

הערכים הממוקדים
הקטנים והגדולים
הממוקדים
הממוקדים
הממוקדים
הממוקדים

אם $a \leq \frac{F(C)}{\mathcal{V}(C)} \leq b$
אז $a \mathcal{V}(C) \leq F(C) \leq b \mathcal{V}(C)$

אם $\alpha < \epsilon$ אז $\alpha \mathcal{V}(C) \leq F(C) \leq (1+\epsilon) \mathcal{V}(C)$

הוכחה: $B = [s_1, t_1] \times \dots \times [s_n, t_n]$; $k_1, \dots, k_n$ קבועים

$$\frac{k_i - 1}{k} \leq t_i - s_i \leq \frac{k_i}{k}$$

אם k_i אז $[s_i, t_i]$ חתומה

7/1/14

13 כחלק מלימוד

$$[-\frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{2}] \times \dots \times [-\frac{a_n}{2}, \frac{a_n}{2}]$$

אם $V(E(Z_n))$ אז $V(Z_n) = \int V(E(Z_n))$

$$V(E(Z_n)) = \int V(E(Z_n))$$



ה'תשנ"ב: פתח את הספר, וראה שיש בו חוק.

ע"י הפתח נקבע:

$$\frac{h-z}{h} = \frac{\psi_i}{q_i}$$

$$\psi_i = a_i (1 - \frac{z}{n})$$

$$V(E(z)) = a_1 \dots a_n \left(1 - \frac{z}{h}\right)^n$$

$$V(a_1, \dots, a_n) = \int_0^h a_1 \dots a_n \left(1 - \frac{z}{h}\right)^n dz = \frac{a_1 \dots a_n h}{n+1}$$

צד 1: $T: U \rightarrow V$ פונקציה, U ו- V קבוצות

2. $E \subseteq U$ for $\forall \alpha$ $I(\alpha) = \det DT(\alpha)$ $\mu(\alpha)$

$$\int_{(F)} f = \int_E f \circ T \cdot |I(x)|$$

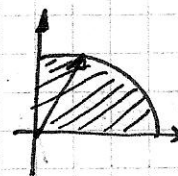
12) 1129 ms $y = r \sin t$; $x = r \cos t$

$$I(r, z) = r \quad \text{on } \mathbb{M}^n; \quad T(r, z) = (x, y) \quad ; \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad ; \quad (0, \infty) \times (0, 2\pi)$$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x, y \geq 0\} \quad \text{b) b)}$$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

שם : פז



$$DT(r, z) =$$

$$\begin{pmatrix} r \sin t & -r \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

১৫০০০
 ১৫০০০

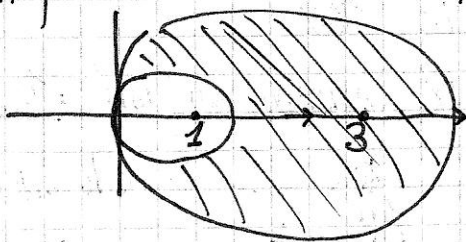
$$\int_0^a \sqrt{x^2 + y^2} \, dy = \int_0^a \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_r I(r, z) \, dr dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r \cdot r \, dr dz = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$$

כ"ח אדר

כ"ה ד'תשס"ח

$$\iint x \, dx \, dy$$

Ans. 1/NC18



$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad (x-3)^2 + y^2 = 9$$

לערנען דעם פארשטאנד.

מהו $T^{-1}(D)$?

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow (r \cos \theta - 1)^2 + r^2 \sin^2 \theta = 1 \rightarrow r^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta + 1 + r^2 \sin^2 \theta = 1$$

1000 POUND AND 1440 ~~POUND~~ ^{POUND} IS μ ; $Y = 2000$ ← $r^2 = 25 \cos^2 \theta$ μ

7/1/14

163

כחץ תחת 13

דוגמה: נבחר Ω כדלקמן: $(x-3)^2 + y^2 = 9 \rightarrow r = 6 \cos z$

הקטור $T^{-1}(D) = \{(r, z) \mid -\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}, 2 \cos z \leq r \leq 6 \cos z\}$ פרמטריזציה

$$\int_0^1 x \, dx \, dy = \int_{T^{-1}(D)} r \cos z \cdot r \, dr \, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2 \cos z}^{6 \cos z} r^2 \cos z \, dr \right) dz$$

השטח הנדרש:

הקטור Ω הוא תחום במרחב (r, z) כדלקמן: $r \geq 0$, $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\tilde{\Omega} = \{(r \cos z, r \sin z, z) \mid (r, z) \in \Omega\}$$

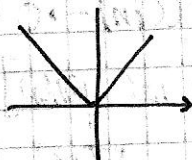
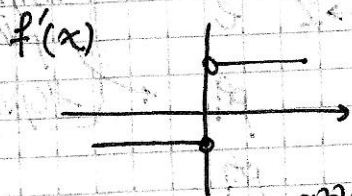
הקטור (r, z) :

$x = r \cos z$; $y = r \sin z$; $z = z$ (המרחב z ממוקם במישור)

$$\int_{\tilde{\Omega}} 1 \, dV = \int_0^{2\pi} dz \int_{\Omega} r \, dr \, dz$$

9/1/14

13 תחת



משפט: $f(x) = |x|$ היא פונקציה רציפה.

הפונקציה $f(x) = |x|$ היא פונקציה רציפה. אם $f'(0)$ קיים, אז f היא פונקציה דיפרנציאלית ב-0. הפונקציה $f(x) = |x|$ אינה דיפרנציאלית ב-0.

המשפט: $B = [s, t] \times \dots \times [s_n, t_n]$ הוא תחום קטן.

המשפט: $k_1, \dots, k_n$ הם מספרים טבעיים, $\frac{k_i-1}{k} \leq t_i - s_i \leq \frac{k_i}{k}$ עבור $i=1, \dots, n$.

המשפט: $[s_i, t_i]$ הוא תחום קטן. k_i הוא מספר טבעי.

המשפט: $G \in \mathcal{P}$ הוא תחום קטן. B הוא תחום קטן.

המשפט: G הוא תחום קטן. B הוא תחום קטן.

המשפט: k_j, k_i הם מספרים טבעיים.

$$\frac{t_i - s_i}{k_i} \leq \frac{k_j}{k_i} \frac{k_i}{k} = \frac{k_j}{k} = 1 + \frac{1}{k_j - 1} \leq 1 + \frac{1}{k_j}$$

13282 212

[illegible]

$$v(G) = \frac{E_1 - S_1}{k_1} \dots \frac{E_n - S_n}{k_n} \leq \frac{1}{k} \dots \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \therefore p \text{ ND}$$

loop NN"?) $v(G) < \epsilon$ PA!

$$\mathcal{U}(B) \cdot \inf_B {}^*F' \leq F(B) \leq \mathcal{U}(B) \cdot \sup_B {}^*F' \quad : \underline{\text{DNC}}$$

במסגרת זו, יש להעריך את נקודת המפנה P_2 ויחס $E=2$ בין
 $\alpha(G) \leq 2$! ו- $\beta(G) \leq 1$ עבור $G \in P_2$. יש להעריך את

$$\frac{F(B)}{v(B)} = \max_{C \in P} \frac{F(C)}{v(C)}$$

ב"פ $\frac{F(B)}{2g(B)} \leq \frac{F(G_1)}{2g(G_1)}$ וכן $B \geq G_1 \in P$ וכן P

$$\psi(G_2) \leq \frac{1}{2}! \quad \frac{F(G_1)}{\psi(G_1)} \leq \frac{F(G_2)}{\psi(G_2)} \text{ e } p \quad G_2 \subseteq G_1 \text{ bpt!} \quad \text{wcc'k}$$

מש"כר התחלק מקבלים סכום $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורד כל יורד לכן מוכח כי

$$\frac{F(G_n)}{v(G_n)} \geq \frac{F(\beta)}{v(\beta)} \quad ! \quad v(G_n) \rightarrow 0 \quad ! \quad \alpha(G_n) \rightarrow 1 \quad e$$

יש נחמה
במחנה
במחנה

$$* F'(x) \geq \frac{F(\beta)}{v(\beta)}$$

$$v(B) \cdot F(\alpha) \geq F(B)$$

$$\alpha(B) \cdot \sup_B^* F \geq F(B)$$

Ex/5

$$^*F, ^*F' \in \mathcal{K}/\mathcal{N} \quad \int_{^*B} ^*F' \leq F(B) \leq \int_B ^*F' \quad : \text{Korollar}$$

$\int_{\mathcal{B}} \star F = \int_{\mathcal{B}} \star F$

$$\int_{**}^* F \leq \int_{**}^* F' \leq \int_{**}^{*B} F' = \int_{**} F' \xrightarrow{\text{?}} \int_{**}^{*B} F' = \int_{**}^{*B} F' \xrightarrow{\text{?}} \int_{**}^{*B} F'$$

9/1/14

155

13 לימודי פתח

$\bar{F}(B) = \int_B F'$ כל מה שיש פה!
 והמשפט הוא F ו- F' הם
 שני פונקציות על אותו
 תחום $\rightarrow$ אז שוויון

$$F(B) = \int_B^* F' = \int_B F'$$

המשפט:

אם F היא פונקציה רציפה ו- F' קיימת
 אז $\int_{[0,1]}^* F' > \int_{[0,1]}^* F'$ ו- F היא פונקציה רציפה

$\sum (t_k - s_k) = a$ ו- p $[s_k, t_k]$ $\bigcup$ $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $a \in (0, 1)$ ו- p

$F([a, b]) = a$ ו- p s_k ; $F([a, b]) = \sum_k \nu([a, b] \cap [s_k, t_k])$ $\rightarrow$ $a \in (0, 1)$ ו- p
 כלומר p $\rightarrow$ a

$x \in (s_k, t_k)$ p_k ; $x \in \bigcup_k (s_k, t_k)$ אז $F'(x) = 1$
 $\int_{[0,1]}^* F = 1$ כלומר F היא פונקציה רציפה
 $1 = \frac{F(x+\epsilon, x+\epsilon) - F(x-\epsilon, x-\epsilon)}{2\epsilon}$ $[x-\epsilon, x+\epsilon]$
 כלומר F היא פונקציה רציפה $[0, 1]$ $\rightarrow$ $a < 1$

$$\int_{[0,1]}^* F' \leq F([0,1]) = a < 1 = \int_{[0,1]}^* F$$

$$\int_{[0,1]}^* F' = \int_{[0,1]}^* F$$