

20/12/13

87

ד"ר בן ציון

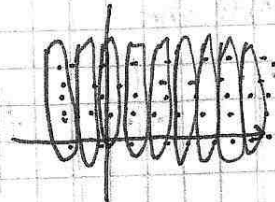
אינטגרל כפול

$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$
 ? II
 $= \int_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} f(\epsilon k, \epsilon l)$
 $= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\epsilon \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(\epsilon k, \epsilon l) \right)$

$\int dx \left(\int dy f(x,y) \right)$

"ליווי סדר הכיכר"

$\int f_x(y) = f(x,y)$ הן אינטגרלים של f ומכאן אינטגרל של f_x



$\int x \mapsto \int f_x$ הן אינטגרלים של f ומכאן אינטגרל של $\int f_x$

$\iint = \int \left(\int \right)$

הקשר בין אינטגרל כפול לאינטגרל מרובע

12 דצמבר

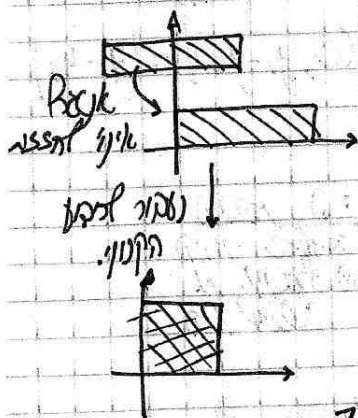
$\mathbb{R}^2 \supseteq B = I_1 \times I_2$ כל $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה

הקשר

$f_x: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה I_2 לכל $x \in I_1$ (הפסגה אינטגרלית)

$x \mapsto \int_{I_2} f_x$ פונקציה I_1

$\int_B f = \int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f_x \right)$



$B = [0,1] \times [0,1]$ כל $f(x,y) = f(x,z)$

$g(x) = \int_{I_2} f_x$ פונקציה I_1

$\int_{I_1} g = \int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f_x \right)$

$\int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f_x \right) = \int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f(x,y) dy \right)$

כל $x \in I_1$
 כל $y \in I_2$
 כל $z \in I_2$
 כל $w \in I_2$

$\int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f_x \right) = \int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f(x,y) dy \right)$

$\int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f_x \right) = \int_{I_1} \left(x \mapsto \int_{I_2} f(x,y) dy \right)$

ה' תשנ"ח
לפני ה' אלהים

.	.	.	.	.
			.	.

וְהָיָה
כִּי יֵרָא
בְּעֵינַי ה'

$$f\left(\frac{k_1 - 0.5}{K}, \dots, \frac{k_n - 0.5}{K}\right) - \frac{\delta \sqrt{n}}{2} \leq \inf_G f \leq \sup_G f \leq f(\dots) + \frac{\delta \sqrt{n}}{2}$$

$$|\delta^n \sum(\dots) - f| \leq \frac{\delta \sqrt{n}}{2} \quad \text{pp. } \delta = \frac{1}{k} \text{ Bk.}$$

$$\int \int (\cdot) \approx \sum_k (\sum_l (\cdot)) \approx \sum_l (\int (\cdot)) \approx \int (\int (\cdot))$$

חזרה: x פון קאמפאקט $\leftarrow$ קאמפאקט $\leftarrow$ פון p פלאט
 $|f_x(y_1) - f_x(y_2)| = |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f(0, y_1) - f(0, y_2)| = |y_1 - y_2|$
 פלאט f

f_X is the pdf
 with f_X
 $f_X(y) = f(x, y)$

$$\begin{aligned} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| &= \\ &= |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \\ &\leq |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$$|S - \int_{\mathbb{C}_0, \mathbb{N}^2} f| \leq \frac{\sqrt{2}}{2M}$$

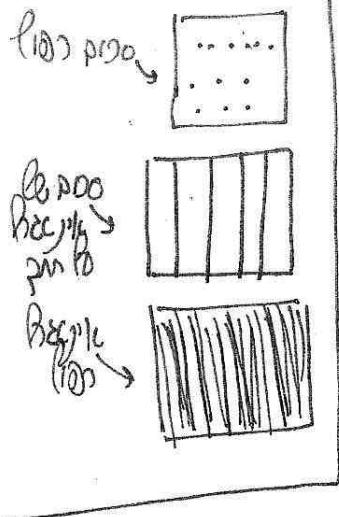
מ
אם יש לי
אני יכול
לעזור לך

$\frac{1}{24} \rightarrow \sum(f) \rightarrow \iint$

31/2/13

89

הערות שונות



$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

כאשר n גדול

אם f היא פונקציה רציפה, אז $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ כאשר $n \rightarrow \infty$

אם f היא פונקציה רציפה, אז $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ כאשר $n \rightarrow \infty$

אם f היא פונקציה רציפה, אז $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ כאשר $n \rightarrow \infty$

$$\int_B f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

אם f היא פונקציה רציפה

$$\left| \int_B f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \right| \leq \frac{\sqrt{2} \Delta x}{2} \quad \Delta x \in \mathbb{N}$$

אם f היא פונקציה רציפה, אז $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ כאשר $n \rightarrow \infty$

$$\int_B f(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) dx$$

אם f היא פונקציה רציפה

[הוכחה בפרק 10]

אם $f: B_1 \times B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אז $\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y) dy \right) dx$

אם f היא פונקציה רציפה, אז $\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y) dy \right) dx$

$$\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y) dy \right) dx$$

$$\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y) dy \right) dx$$

אם f היא פונקציה רציפה



$$\int_{B_2} f(x,y) dy$$

אם f היא פונקציה רציפה

אם $f(x,y) = f(y,x)$, אז $\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1 \times B_2} f(y,x) dx dy$

$$\int dx \int dy f(x,y) = \iint dx dy f(x,y) = \int dy \int dx f(x,y)$$

אם f היא פונקציה רציפה

$$\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \left(\int_{B_1} f(x) dx \right) \left(\int_{B_2} g(y) dy \right)$$

אם f היא פונקציה רציפה

אם f היא פונקציה רציפה, אז $\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y) dy \right) dx$

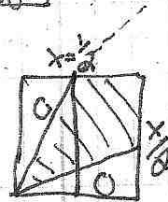
אם f היא פונקציה רציפה, אז $\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y) dy \right) dx$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{2}, y \in B_2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אם f היא פונקציה רציפה, אז $\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) dx dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y) dy \right) dx$

3/1/01
 פונקציה: קיום של פונקציה רציפה לא נדרש
 חסמה של פונקציה לא נדרש

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+y}} & ; \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ ב $[0,1] \times [0,1]$



$\int_{[0,1]} f_x = \begin{cases} \int_{x/2}^{2x} \frac{1}{\sqrt{x+y}} dy & \text{אם } x \leq \frac{1}{2} \\ \int_{x/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+y}} dy & \text{אם } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

אם $x \leq \frac{1}{2}$: $\int_{x/2}^{2x} \frac{1}{\sqrt{x+y}} dy = 2\sqrt{x+y} \Big|_{x/2}^{2x} = 2\sqrt{3x} - 2\sqrt{\frac{3}{2}x} = \dots$

אם $x > \frac{1}{2}$: $\int_{x/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x+y}} dy = 2\sqrt{x+y} \Big|_{x/2}^1 = 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{\frac{3}{2}x}$

$\int_{[0,1]} (x \mapsto f_x) = \int_0^{1/2} (2\sqrt{3x} - 2\sqrt{\frac{3}{2}x}) dx + \int_{1/2}^1 (2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{\frac{3}{2}x}) dx = \dots$

לחומר אינטגרל חוצי קיים וטוב, זה הפשוט ביותר שיש לנו
 ונראה כי אינטגרל זה מתכנס.

פונקציה: קיום של פונקציה רציפה לא נדרש
 חסמה של פונקציה לא נדרש

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & ; x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ ב $[0,1]^2$

$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \frac{2x - (x+y)}{(x+y)^3} dy = 2x \int_0^1 \frac{dy}{(x+y)^3} - \int_0^1 \frac{dy}{(x+y)^2} = \dots$

$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} \dots > 0$ (האינטגרל חוצי הוא חיובי)

$-f(y,x) = f(x,y)$ כל

אנו חושבים על פונקציה רציפה לא נדרש

פונקציה: קיום של פונקציה רציפה לא נדרש

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & ; x+y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, y+x\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ ב $[0,1]^2$

הפונקציה f אינה רציפה

אם $x, y \in \mathbb{Q}$ אז $x+y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ו $y+x\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ולכן $f(x,y) = 1$
 אם $x, y \notin \mathbb{Q}$ אז $f(x,y) = 0$

31/12/13

91

הערך של פונקציה

הערך של פונקציה: $f: B_1 \times B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ כי הפונקציה f היא פונקציה
 של פונקציה f שווה לא. והפונקציה f פונקציה, אבל אינה אינטגרלית
 שווה? הקרובה צפופה ושווה פונקציה צפופה ופונקציה אינטגרלית של פונקציה.

⊖ האינטגרל של פונקציה $f: B_1 \times B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית כאלו $B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, $B_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ ופונקציה f אינטגרלית.

$$\int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x) ; \int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x) ; \int_{B_2}^* (y \mapsto \int_{B_1} f_y) ; \int_{B_2}^* (y \mapsto \int_{B_1} f_y)$$

$\int_{B_1 \times B_2} f$? פונקציה ופונקציה

הפונקציה: $B = B_1 \times B_2$ כאלו B_1 ופונקציה f אינטגרלית
 ופונקציה f אינטגרלית

האינטגרל של פונקציה f אינטגרלית $g \geq f$ ופונקציה g אינטגרלית

$$\int_B f = \inf_{g \geq f} \int_B g$$

האינטגרל של פונקציה f אינטגרלית $g \geq f$ ופונקציה g אינטגרלית

$$\int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x) \leq \int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* g_x) = \int_B g$$

האינטגרל של פונקציה f אינטגרלית $g \geq f$ ופונקציה g אינטגרלית

$$\inf \int_B g = \int_B^* f \geq \int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x)$$

$$\int_B^* f \geq \int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x)$$

האינטגרל של פונקציה

$$\int_B f \leq \int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x) \leq \int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x) \leq \int_B f$$

האינטגרל של פונקציה f אינטגרלית $g \geq f$ ופונקציה g אינטגרלית

$$\int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x) = \int_{B_1} (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x) \rightarrow (x \mapsto \int_{B_2}^* f_x)$$

האינטגרל של פונקציה f אינטגרלית $g \geq f$ ופונקציה g אינטגרלית

האינטגרל של פונקציה f אינטגרלית $g \geq f$ ופונקציה g אינטגרלית

31/12/13

92

~~המשפט~~

⊖ אחרת המעט זה פני ממש

⊖ אחרת $\int f \circ g \, dy = (\int f) (\int g)$ וגם אחרת $f \circ g$ אינה פונקציה של y !

מקרה: [מחזורי ממש]

זה $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ קבוצות פתוחות, אז $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supseteq E = E_1 \times E_2$

⊖ זה נכון! $\int_{n+m} (E) = \int_n (E_1) \int_m (E_2)$

מקרה:

אם $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרל מקומי בלתי תלוי $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ קבוצה

$$\int_{\mathbb{R}^m} (x \mapsto \int_{E_x} f_x) = \int_E f$$

כאן $E_x = \{y \mid (x,y) \in E\}$ ו- $f_x(y) = f(x,y)$

⊖ מקרה שליוויל הממש $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $f \cdot 1_E$ $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ קבוצה פתוחה

המשפט זה
הוא "משפט
פונקציה
של פאניני"

$$\int_{n+m} (E) = \int_{\mathbb{R}^m} (x \mapsto \int_n (E_x))$$

31/12/13

~~המשפט~~

ממש (פונקציה):

$f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $B \subseteq \mathbb{R}^m$ גיבוי ממש

$$\int_{A \times B} f(x,y) \, dx \, dy = \int_A \left(\int_B f(x,y) \, dy \right) \, dx = \int_B \left(\int_A f(x,y) \, dx \right) \, dy$$

הקבוצה של
האינטגרל
הממש
הוא

הוא אם האינטגרל הממש של f קיים בנקודה אחת אז קיים בנקודה אחרת
[זה קבוצה הממש בנקודה אחת קיים בנקודה אחרת הוא קבוצה ממש]

⊖ נכון: $\int_Q y \sin(xy) \, dx \, dy$ כאשר $Q = [1,2] \times [0,\pi/2]$ ממש

$$\int_Q y \sin(xy) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 y \sin(xy) \, dx \right) \, dy = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{y \cos(xy)}{x} \right]_1^2 \, dy = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{2y \cos(2y)}{2} + \frac{y \cos(y)}{1} \right) \, dy$$

31/12/13

93

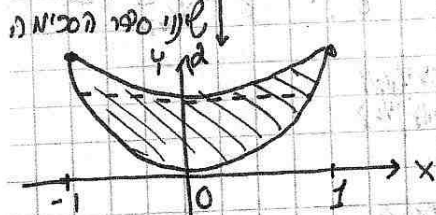
12 תרגום

$$= \int_0^{\pi/2} y \left[\frac{-\cos(xy)}{y} \right]_0^2 dy = \int_0^{\pi/2} -\cos(2y) + \cos(y) dy = \dots = 1$$

תרגום

תרגום: הפונקציה הזו היא פונקציה של y בלבד

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1+x^2} f(x,y) dy dx$$



הפונקציה הזו היא פונקציה של y בלבד

כל $0 \leq y \leq 1$ אז

$$\sqrt{\frac{y}{2}} \geq |x|$$

כל $1 \leq y \leq 2$ אז

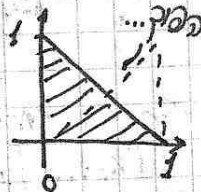
$$y \leq 1+x^2 \text{ כל } |x| \leq \sqrt{y-1}$$

$$|x| \geq \sqrt{y-1} \text{ כל } y \leq 1$$

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y) dx$$

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y) dy dx$$

$$\int_0^1 \int_y^1 f(x,y) dx dy$$



הפונקציה הזו היא פונקציה של y בלבד

$$\iiint_E (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3$$

כל E היא תחום מסוג זה

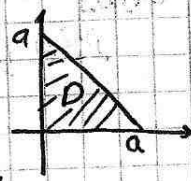
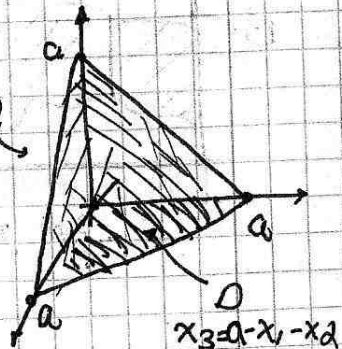
$$x_1 + x_2 + x_3 = a \text{ ! כל } x_i = 0$$

הפונקציה הזו היא פונקציה של x_1, x_2, x_3

$$\iiint_E x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\int_0^a \int_0^{a-x_1} \int_0^{a-x_1-x_2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^a \int_0^{a-x_1} \left(x_1^2(a-x_1-x_2) + \frac{(a-x_1-x_2)^3}{3} \right) dx_2 dx_1$$

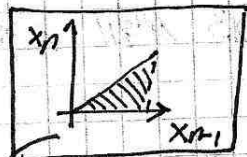
$$= \int_0^a \int_0^{a-x_1} \left(x_1^2(a-x_1-x_2) + \frac{(a-x_1-x_2)^3}{3} \right) dx_2 dx_1$$



הפונקציה הזו היא פונקציה של x_1, x_2

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} dx_n f(x_n) = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

$$\int_0^x \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \xrightarrow{\text{פונקציה}} \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_{n-1} = \dots = \int_0^x f(x_n) dx_n$$



$$= \int_0^x dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-2} \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) \cdot (x_{n-2} - x_n) dx_n$$

כל הנתונים נכנסים לתוך האינטגרל

$$= \int_0^x dx_1 \dots \int_0^{x_{n-3}} dx_{n-3} \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-2} f(x_n) \int_{x_n}^{x_{n-2}} (x_{n-2} - x_n) dx_{n-2} = \int_0^x dx_1 \dots \int_0^{x_{n-3}} dx_{n-3} f(x_n) \left[\frac{(x_{n-2} - x_n)^2}{2} \right]_{x_n}^{x_{n-2}}$$

$$= \int_0^x dx_1 \dots \int_0^{x_{n-3}} f(x_n) \cdot \left(\frac{x_{n-2}^2 - x_n^2}{2} \right) dx_n = \dots$$

המשפט של פאיינימן-ליב

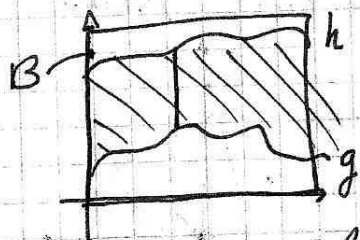
2/1/14

בהינתן $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

לכל $x \in B$ מתקיים $g(x) \leq h(x)$

$E = \{(x, z) \mid g(x) \leq z \leq h(x)\}$ נקודה בקובץ
כאשר $g, h: B \rightarrow \mathbb{R}$

המרחק בין g ל- h הוא פונקציה



... מתקיים $g(x) \leq h(x)$

$$E_x = [g(x), h(x)]$$

$$\int_{E_x} f(x, z) dz = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, z) dz$$

$$\int_a^b f(z) dz = \int_{[a, b]} f(z) dz$$

$$[a, b] \text{ היא מרחב}$$

$$-\int_b^a = \int_a^b$$

כל המרחב הזה

אם $a \leq b$ אז

הפונקציה f היא פונקציה ממשית F קובץ ממשית F הוא קובץ

הקובץ $\{x \in B \mid g(x) \leq h(x)\}$ הוא קובץ ממשית F הוא קובץ
אם g, h פונקציות ממשיות

$x \mapsto \int_x f$ הפונקציה הזו היא הפונקציה F המבוקשת
כלומר לכל x מתקיים $F(x) = \int_x f$

12 ml LND

$$\int_a^b f(z, x) dx$$

2nd 2nd

וְיִשְׂרָאֵל הָיָה
וְהָיָה
לְבָרְכָם
לְבָרְכָם
לְבָרְכָם

$[...]$ ମଧ୍ୟରେ $\pm$ ର ସଂଖ୍ୟା. ଯଦି $\pm \in [0, 1]$ ର ଯେକୌନିଏର f_x, g_x ହେବ

שלום
עין רצות
לפניך

הן רצוף ויש G, F ויב

תשובה: אכן, יש פה F, G ש $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ אבל $f \neq g$ (למשל $f(x) = x$, $g(x) = x^2$).

[illegible]

$\leftarrow \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ $F' = G$ ~~2001~~ μH

~~$$\int_{\gamma} G(s) ds = F(z) - G(a)$$~~

$$\int_0^z G(s) ds = F(z) - F(0)$$

$$x \in B \text{ ist } \int_0^x g(s) ds = f_x(x) - f_x(0) \quad \text{geg. 1/k } \frac{1}{1-x} \text{ ist}$$

$$\int_{B \times [0,1]} g = \int_B dx \int_{[0,1]} dz g(z, x) ; = \int_{[0,1]} dz \int_B dx g(z, x) = \int_0^1 G(z) dz$$

!lelelele g "

החוקר, ד"ר יוסף

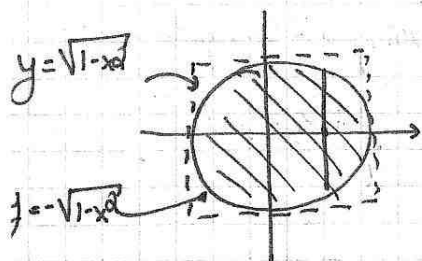
$$\int_0^a G(x) dx = \int_B dx \int_{[0,a]} dz \frac{g(x)}{g(x)} = \int_B dx (F_x(a) - F_x(0)) = \overbrace{\int_B F_x(a)}^{F(a)} - \underbrace{\int_B F_x(0)}_{F(0)}$$

2/1/14

96

הוגר לשיעור

ההפוך והפוך

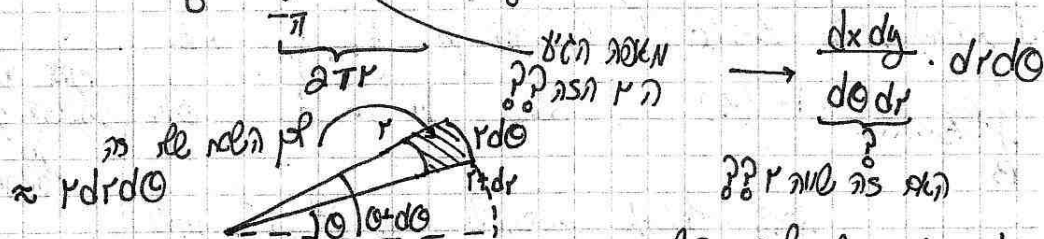


נניח אזור מוגדר על ידי

המשוואה $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{השטח} = \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} r d\theta = \int_0^1 2\pi r dr = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$



השטח הכולל הוא $r dr d\theta$

$$T: (r, \theta) \mapsto (x, y) \quad \text{ההפוך והפוך}$$

$$|det DT| = \frac{dx dy}{dr d\theta} \quad ; \quad det T \text{ הוא } \frac{dx dy}{dr d\theta}$$

$$[T = DT]$$