19/12/13 78

המשך שיעור 10

ולכן $\|f\circ\varphi - f_n\circ\varphi\|^* \to 0$ ו $f\circ\varphi$ היא ליפשיץ כהרכבה של ליפשיצים.
לכן $f\circ\varphi$ אינטגרבילית לפי הקריטריון שהוכחנו.

<u>תרגיל:</u> להראות לפי' $\varphi(f(),g())$ כאשר f,g אינטגרביליות
ו $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ליפשיץ ו $\varphi(0,0)=0$

24/12/13

שיעור שבוע 11

<u>תרגיל:</u> אם f, g אינטגרביליות צריך להוכיח ש $\min(f,g)$
ו $\max(f,g)$ ו $f\cdot g$ אינטגרביליות.

<u>תרגיל:</u> אם קבוצת E, F מדידות ז'ורדן אז גם $E\cup F$
גם $E\cap F$ וכן $E\setminus F$ קבוצה מדידת ז'ורדן.

נובע מ"יפה" שעשינו קודם.

<u>הגדרה:</u> תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונ' אינטגרבילית מקומית [כלומר אינטגרבילית
בכל $B\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה] ו $E\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה ז'ורדן אזי

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot 1_E$$

[וזה קיים כי המכפלה אינטגרבילית כי כל אחת מהן אינטגרבילית מהתרגיל. ולכן המכפלה אינטגרבילית מקומית אבל גם בעלת תומך חסום. שכן אינטגרבילית]

*אינטגרביליות מקומית - שלא תהיה הו"ג אינטגרביליות! למשל כל מיני פונ' מ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הן אינטגרביליות מקומית אבל לא בכל $\mathbb{R}$.
פונ' היא אינ' אמ"מ היא אינטגרבילית מקומית ובעלת תומך חסום

אינטגרל של פונ' בקבוצה ז'ורדן בהגדרה...

ולכן:
$$\int_{E\uplus F} f = \int_E f + \int_F f$$
[מלינאריות האינטגרל והאינדיקטור... $1_{E\uplus F} = 1_E + 1_F$]

⊖ ולכן האינטגרל בעצם נותן לנו פונ' קבוצה כמו שרצינו...

<u>עוד בנושא מידת ז'ורדן:</u> [מעטפת עליונה של פונ' ליפשיץ...]
$$v^*(E) = \lim_{l\to\infty}\int(1_E)^+_L$$

כמו כן ראינו $(1_E)^+_L = (1_{\bar{E}})^+_L$ ולכן $v^*(E) = v^*(\bar{E})$ ☺

<u>כמו כן:</u>
$$v_*(E) = \lim_{l\to\infty}\int(1_E)^-_L$$

כמו כן $(1_E)^-_L = (1_{E^\circ})^-_L$

ולכן $v_*(E) = v_*(E^\circ)$ ☺

24/12/13   79   **המשך שיעור 11**

הערה: אפשר לתת דוגמאות לקבוצה לא מדידה, למשל $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ מקיים $\bar{A}=1_{[0,1]}$ ו- $A^\circ=\emptyset$ ולכן $v_*(A)=v_*(\mathring{A})\neq v^*(\bar{A})=v^*(A)$ ולכן לא מדידה.

טענה: יהי $E\subseteq B$.

משתמש בקמירות של התיבה

$$(1_E)^+_L-(1_E)^-_L=(1_{\partial E})^+_L$$

ולכן נקבל כמסקנה:

$$\lim_{l\to\infty}\int_B(1_E)^-_L+\lim_{l\to\infty}\int_B(1_{\partial E})^+_L=\lim_{l\to\infty}\int_B(1_E)^+_L$$

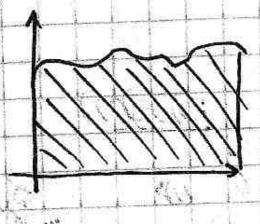
ולכן

$$v_*(E)+v^*(\partial E)=v^*(E)$$

וזה נכון כי כל הגבולות מוגדרות על אותו מקום.

ולכן $v_*(E)=v^*(E)$ אמ"מ $v^*(\partial E)=0$. כלומר קבוצה היא מדידה ג'ורדן אמ"מ השפה שלה ממידה אפס.

כלומר זה הגיוני שמה שהגרף הוא מדיד כאשר הפונ' אינטגרבילית, ולכן הגרף שלה ממידה אפס! כי זה השפה של הקבוצה.



תרגיל: יהיו שתי קבוצות E,F מתקיים $\partial(E\cup F)\subseteq\partial E\cup\partial F$ ו- $\partial(E\cap F)\subseteq\partial E\cup\partial F$ ו- $\partial(E\setminus F)\subseteq\partial E\cup\partial F$

האם $\partial(E\cap F)\subseteq\partial E\cap\partial F$?

זה מסביר שאיחוד/חיתוך/הפרש של קבוצות מדידות הוא מדיד כי השפה היא אפס, ולאחר הפעולה תישאר ממידה אפס כי תהיה באיחוד סופי של קבוצות ממידה אפס

טענה: יהיו E,F מדידות ג'ורדן.

$$v(E\cup F)+v(E\cap F)=v(E)+v(F)$$

הוכחה:

$$1_{E\cup F}+1_{E\cap F}=1_E+1_F$$

באופן אינטואיטיבי...

ולכן נעשה אינטגרל על שני האגפים נקבל הנדרש.

⊕ עבור יותר משתי קבוצות עושים משהו הכלה והפרדה...

טענה: תהי $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונ' גזירה ברציפות. נסמן $Z_g=\{x\mid g(x)=0\}$ ו- $\nabla g\neq 0$ ב- Z_g. אז ממשפט הפונ' הסתומה Z_g הוא גרף של פונ' (בסביבה) ולכן ממידה אפס, ולכן לכל קומפקט יהיה כיסוי סופי של Z_g חיתוך הקומפקט הזה בקבוצות ממידה אפס ולכן זה יהיה ממידה אפס

אם ספירה היא ממידה אפס, ולכן החיבור מדיד

24/12/13

חדו"א שיעור 11

הגדרה: עבור חלוקה P של תיבה, נגדיר הקוטר של P:

$\mathrm{diam}\, C \stackrel{\Delta}{=} \max_{x,y} |x-y|$; $\mathrm{mesh}(P) = \max_{C \in P} \mathrm{diam}\, C$ קוטר התיבה

החלוקה בעלת הקוטר הגדול ביותר.

טענה: אם f אינטגרבילית בתיבה B אז $U(f,P) \xrightarrow{\mathrm{mesh}(P)\to 0} \int^* f$

כלומר $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall P\ (\mathrm{mesh}(P)<\delta \to |U(f,P) - \int^* f| < \varepsilon)$

$(\mathrm{mesh}(P)<\delta \to |L(f,P) - \int_* f| < \varepsilon)$

(שים לב שלפני של החלוקה, דק לא בהכרח תלוי ב mesh, ולכן זה לא מובן מאליו)

תרגיל: (א) אם $f: B \to \mathbb{R}$ פונ' ליפשיץ עם קבוע L אז

$$|U(f,P) - L(f,P)| \le L \cdot \mathrm{vol}(B) \cdot \mathrm{mesh}(P)$$

(ב) להשתמש בזה להוכחת הטענה לעיל, בעזרת סנדוויץ' ליפשיץ

תרגיל: אם פונ' f אינטגרבילית ב $\mathbb{R}^n$ אז

$$\varepsilon^n \sum_{k_1,\dots,k_n \in \mathbb{Z}} f(k_1\varepsilon,\dots,k_n\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} f$$

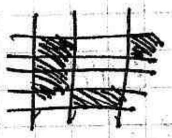
יש f! תומך חסום! ופונ' חסומה!

הגדרה: δ-פיקסל: $[k_1\delta, k_1\delta+\delta]\times\dots\times[k_n\delta, k_n\delta+\delta]$

זהו δ-פיקסל סגור.

δ-פיקסל חצי סגור $[k_1\delta, k_1\delta+\delta)\times\dots\times[k_n\delta, k_n\delta+\delta)$

כדי שהאיחוד זר...



קבוצת פיקסלים-δ: הינו איחוד סופי של δ-פיקסלים

תרגיל: יהי קבוצה ג'ורדן E, ויהי $\varepsilon>0$ אם δ מספיק קטן אז קיימות קבוצות פיקסלים δ E_-, E_+ כך ש: $E_- \subseteq E_+$

! $E_- \subseteq E \subseteq E_+$! $v(E_+) - v(E_-) < \varepsilon$

סנדוויץ' פיקסלים מלמטה ומלמעלה

מיקום:

נסמן $J(\mathbb{R}^n)$ קבוצת מדידות ג'ורדן ב $\mathbb{R}^n$; $v: J(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$!

ומקיים: לכל $E \in J(\mathbb{R}^n)$

(1) חיבוריות $v(E \uplus F) = v(E) + v(F)$

(2) אינווריאנטיות להזזה $v(E+x) = v(E)$

24/12/13   87   העמק שיעור 11

טענה: אם $w: J(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ המקיימת התכונות שציינו שעד מקיימת אז קיים $C\in[0,\infty]$ רק שלכל $A\in J(\mathbb{R}^n)$ מקיים $w(A)=C\cdot v(A)$ [יחידות מידת ז'ורדן עד כדי קבוע]

הוכחה:
תהי w שכזו, אזי לכל δ-פיקסל w תחזיר אותו ערך מאינווריאנטיות להזזה והתוספה שבין שני δ-פיקסלים ובפרט בהזזה. נסמן $[0,\delta)^n$ להיות δ-פיקסל לא סגור משהו. [עדיף פתוח כי אחרת לא יופיע לנו התאפסות w על השפה...]

נתבונן בפיקסל גדול יותר: $w([0,2\delta)^n)=2^n w([0,\delta)^n)$ כי קוביה מצלע פי שניים יותר גדולה אפשר לחלק ל-2^n קוביות כאלו מאורך הצלע. ונשים לב שהאיחוד זר קיבלנו מאדיטיביות הסופית.

נסמן $G=w([0,1)^n)$; אזי מקיים $2^{-kn}G=w([0,2^{-k})^n)$

[כי k פעמים הקטנו פי 2^n.]

לכן $w=C\cdot v$ על פיקסלים בגודל 2^{-k} כי אם $v([0,2^{-k})^n)=2^{-kn}$.

לכן יש שוויון כזה גם בקבוצת פיקסלים מהסוג 2^{-k}, כי קבוצת פיקסלים זה איחוד סופי של כאלה. [נובע מאדיטיביות והעובדה שהפיקסלים זרים].

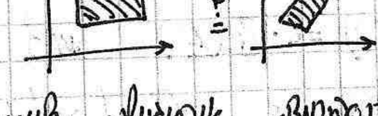
כעת תהי A קבוצת ז'ורדן, אז לכל $\varepsilon>0$ קיים k וקבוצות פיקסלים מסוג 2^{-k} E_-,E_+ כך ש- $E_-\subseteq E\subseteq E_+$ ו- $v(E_+)-v(E_-)\le\varepsilon$

[מהתכונה שאינו ערך שפה מכוסה בפיקסלים]

לכן
$$C\cdot v(E_-)\le C\cdot v(E)\le C\cdot v(E_+)$$
$$w(E_-)\le w(E)\le w(E_+)$$
לכן מאדיטיביות מקיים ומאי-שליליות

כלומר נשים לב שלכל קבוצת פיקסלים אנו יודעים $C\cdot v(E_+)=w(E_+)$; $C\cdot v(E_-)=w(E_-)$, לכן $|w(E_-)-w(E_+)|\le C\cdot\varepsilon$ וכמו כן נקבל $|Cv(E)-w(E)|<$

לכן לכל $\varepsilon>0$ לכן $Cv(E)=w(E)$ כנדרש.



אינווריאנטיות לסיבובים:

טענה: נניח כי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ טרנספורמציה אורתוגונלית, כלומר לינארית ו- $|Tx|=|x|$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$. אז מתקיים

(א) $E\in J(\mathbb{R}^n)\leftrightarrow T(E)\in J(\mathbb{R}^n)$ (ב) אם א' אז $v(T(E))=v(E)$

[T זו למעשה טרנספורמציית סיבוב...]

טיוטות

למה: $\vartheta^*(T(Q)) \le n^{n/2}\,\vartheta(Q)$ לכל δ קוביה Q

הוכחה: מתקיים $\max_{x,y\in Q}|x-y| = \operatorname{diam} Q \le \delta\sqrt{n}$

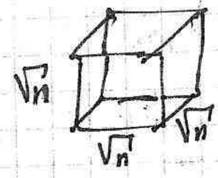
כי בכיוון ההפרש לא גדול מ-δ.

לכן! $\operatorname{diam} T(Q) \le \delta\sqrt{n}$ כי T משמרת מרחקים...

לכן! $T(Q)\subseteq[s_1,s_1+\delta\sqrt{n}]\times\dots\times[s_n,s_n+\delta\sqrt{n}]$ לכן!

$$\vartheta^*(T(Q)) \le (\delta\sqrt{n})^n \quad ; \quad \vartheta(Q)=\delta^n$$

לכן! $\vartheta^*(T(Q))\le(\sqrt{n})^n\,\vartheta(Q)$



לכן נקבל:

$$\vartheta^*(T(E)) \le n^{n/2}\,\vartheta^*(E)$$

כי זה נכון לכל קוביה, לכן לכל קבוצה פתוחה! לכן לכל קבוצה כי ניתן לקרב ע"י קבוצות פתוחות.

לכן קיבלנו $\vartheta^*(E)=0 \Rightarrow \vartheta^*(T(E))=0$.

כמו כן מתקיים $\partial(T(E)) = T(\partial E)$ כי T הומאומורפיזם! לכן משמרת טופולוגיה!

לכן! $\vartheta^*(\partial E)=0 \Rightarrow \vartheta^*(\partial(T(E)))=0 \Rightarrow T(E)$ מדידה ז'ורדן כנדרש.

את הכיוון ההפוך נקבל מהפעלת T^{-1} שגם הוא אורתוגונלית, כנדרש.

(עבור $w(E)=\vartheta(T(E))$ לכל E ז'ורדן. $w: J(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ ממפה שהוכחנו בסעיף א'. ! w היא חיבורית כי T חח"ע וכמו כן w אינ' להזזה כי

לכן אחוז זה עובר לאחוז זה..

$$T(E+x) = T(E)+T(x)$$

לכן

$$\vartheta(T(E+x)) = \vartheta(T(E))$$

כי ϑ אינ' להזזה.

לכן מיחידות המידה שהוכחנו קודם נקבל $w(E)=c\cdot\vartheta(E)$ עבור $c\in[0,\infty]$ כלשהו! כלומר $\vartheta(T(E))=c\cdot\vartheta(E)$.

ניקח $E=\{x \mid |x|\le 1\}$, זו קבוצת ז'ורדן. ולכן יתקיים $T(E)=E$ כי T משמרת נורמה... לכן $\vartheta(E)=c\cdot\vartheta(T(E)) \Rightarrow \vartheta(E)=c\cdot\vartheta(E)$

אז או $\vartheta(E)=0$ או $c=1$ אבל ידוע כי $\vartheta(E)\neq 0$ כנדרש. לכן $c=1$

ולכן קיבלנו הנדרש.

נפח משמר גם במרחב אפיני אוקלידי כי זה אינווריאנטי להזזה

הערה: אפשר להרחיב נפח בכל מרחב אוקלידי כי כל מה שצריך זה נורמה...

24/12/13   83

תרגול שבוע 11

תרגיל: לכל $x\in[0,1]$ נתון לפי הפיתוח הבינארי בצורה יחידה ע"י:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k(x)}{2^k}$$ כאשר $\liminf_{k\to\infty}\beta_k=0$ כלומר לא יהיה אינסוף אחדות "כמעט תמיד".

ו-$\beta_k(x)\in\{0,1\}$.

נגדיר:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{2k}(x)}{2^k}$$; הראו כי f אינטגרבילית ומצאו אינטגרל של f.

פתרון:

נתבונן בחלוקה $P_n=\left\{\frac{i}{2^{2n}}\right\}_{i=0}^{2^{2n}}$, ונשים לב כי

$$[\overbrace{0,\dots,0}^{2n\ \text{מקומות}}]=[0,\tfrac{1}{2^{2n}})$$

זו הרישא של כל המספרים בקטע

$$\downarrow$$

$$[\tfrac{1}{2^{2n}},\tfrac{2}{2^{2n}})=[\overbrace{0,\dots,1}^{2n\ \text{מקומות}})$$

זו הרישא של המספרים בקטע.

באופן כללי:

$$I_{n,k}=\left[\frac{k}{2^{2n}},\frac{k+1}{2^{2n}}\right]=\left[\beta_1\!\left(\tfrac{k}{2^{2n}}\right),\dots,\beta_{2n}\!\left(\tfrac{k}{2^{2n}}\right)\right]$$

זה התחילית של המספרים בקטע.

בכיוון... מה שבא אחרי לא משנה את הקטע...

ונשים לב כי

$$\frac{1}{2^{n}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_{2i}\left(\frac{k}{2^{2n}}\right)}{2^{i}}=\sup_{x\in I_{n,k}}f(x)$$

וזה המקסימום שאפשר להוסיף כי יש לו שינוי רק בסיפא

כיצד הרישא המובטחת

באותו האופן...

$$\inf_{x\in I_{n,k}}f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_{2i}\left(\frac{k}{2^{2n}}\right)}{2^{i}}$$

ולכן! $\sup f(x)-\inf f(x)=\frac{1}{2^n}$, אז

$$U(P_n,f)-L(P_n,f)\le\frac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

אין בעיה שלוקחים את הקטעים חצי פתוחים כי זה קבוצה זניחה

וקיבלנו סדרה של חלוקות עם עדינות שואפת לאפס שההפרש בין הסכומים העליון והתחתון שואף לאפס, ולכן מתקיים שוויון בין האינטגרל העליון לתחתון.

נחשב סכום תחתון:

$$L(P_n,f)=\sum_{k=0}^{2^{2n}-1}\inf_{I_{n,k}}\mathrm{Vol}(I_{n,k})=$$

$$=\sum_{k=1}^{2^{2n}-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta^{k}_{2i}}{2^{i}}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^{2n}-1}\frac{\beta^{k}_{2i}}{2^{i}}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{2n-1}}{2^{i}}=$$

בדיוק בחצי מהתחומים יהיה 1 בספרה ה-i = ובחצי יהיה אפס בספרה ה-i

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot1=\int_{[0,1]}f(x)\,dx$$

טענה: אם f אינטגרבילית אזי $|f|$ אינטגרבילית.

הוכחה: לכל קבוצה D ו-f המוגדרת על D מתקיים

$$\sup_D|f|-\inf_D|f|\le\sup_D f-\inf_D f$$

נשים לב שיש שני מקרים: $\sup|f|=\sup f$! $\sup|f|=\sup(-f)$

24/12/13 ז4 <u>המשך תרגול 11</u>

אם מקרה 1 מתקיים

$$\sup|f|-\inf|f| = \sup f - \inf|f| \le \sup f - \inf f$$

אם מקרה 2 מתקיים

$$\sup|f|-\inf|f| = \sup(-f)-\inf|f| \le \sup -f - \inf -f = \sup f - \inf f$$

לכן מתקיים לכל חלוקה P: $U(P,|f|)-L(P,|f|) \le U(P,f)-L(f,P)$

לכן $\overline{\int}|f| - \underline{\int}|f| \le \overline{\int} f - \underline{\int} f = 0$

כי f אינטגרבילית

לכן $\overline{\int}|f| = \underline{\int}|f|$

מסקנה: אם f,g אינטגרביליות אז $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ אינטגרביליות.

הוכחה: $\max(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$; זה אינטגרבילי לפי מה שהוכחנו לעיל...

$\min(f,g) = -\max(-f,-g)$; לכן זה אינטגרבילי כי זה מקס אינטגרבלי.

מסקנה: B, A מדידות $\longleftarrow$ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ מדידות

כי $v(A\cup B) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A\cup B} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\max(1_A, 1_B)}_{\text{אינטגרבילי... כמקס' של אינטגרבלים.}}$

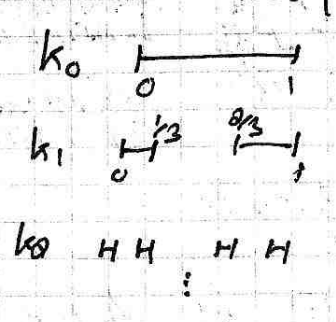
$$v(A\cap B) = \int \min(1_A, 1_B)$$

$$v(A\setminus B) = \int 1_A - 1_{A\cap B}$$

$\blacksquare$

דוגמא: קבוצה לא בת מניה אך ממידת ז'ורדן אפס

קבוצת קנטור!



קנטור קומפקט: חיתוך של קומפקטים וכן חסומה סגורה וכן סגורה.

20/12/13 בס

שיעור שבוע 11

טענה: תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ טרנספורמציה אורתוגונלית ! $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פ' חסומה עם תומך חסום. אז

$$\int_{*\mathbb{R}^n} f\circ T = \int_{*\mathbb{R}^n} f \;;\; \int^*_{\mathbb{R}^n} f\circ T = \int^*_{\mathbb{R}^n} f$$

ולכן אם f אינטגרבילית אז גם $f\circ T$ אינטגרבילית, ויש שוויון באינטגרלים. [כלומר סיבוב והזזה לא משנים האינטגרל]

הוכחה: נגדיר $h=\mathbb{1}_B$ עבור B תיבה. אז $h\circ T=\mathbb{1}_{T^{-1}(B)}$, כמובן, כאשר $T^{-1}(B)=\{x \mid T(x)\in B\}$ ואם T הפיכה אז $T^{-1}(B)=\{T^{-1}(x) \mid x\in B\}$.

כמו כן B מדידה אמ"מ $T^{-1}(B)$ [כי T^{-1} גם כן אורתוג' וראינו שכל S אורתוג' אז B מדידה אמ"מ $S(B)$ מדידה]

ולכן h אינטגרבילית אמ"מ $h\circ T$ אינטגרבילית [זה שקול למדידות]

ומשום ש B תיבה אז B ~~...~~ מדידה [הוכחנו] ולכן $\int h = v(B)$

וכמו כן נקבל $T^{-1}(B)$ מדידה מה אמ"מ, ולכן $v(T^{-1}(B))=\int h\circ T$

אבל T^{-1} שומרת נפח ג'ורדן ולכן

$$\int h\circ T=\int \mathbb{1}_{(T^{-1}(B))} = v(T^{-1}(B)) = v(B) = \int h$$

לכן זה נכון לפונ' אינדיקטור, ולכן לכל צירוף לינארי שלהן זה נכון ולכן לכל פונ' מדרגות זה נכון, כלומר לכל h מדרגות $\int_{\mathbb{R}^n} h\circ T=\int_{\mathbb{R}^n} h$

נתבונן בf. לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונ' מדרגות h כך ש

$f\le h$! $\int h\le \int^* f+\varepsilon$ [מתכונות של פונ' מדרגות] [כי פונ' מדרגות הוא המחלקה! מתכונות האינפימום]

משום ש $f\le h$ אז $f\circ T\le h\circ T$ ולכן $\int^* f\circ T\le \int h\circ T$

אבל $h\circ T$ אינטגרבילית כפי שראינו!

$\int^*_{\mathbb{R}^n} h\circ T=\int_{\mathbb{R}^n} h\circ T=\int_{\mathbb{R}^n} h$ כפי שראינו לעיל! וזה $\int_{\mathbb{R}^n} h\le\int^*_{\mathbb{R}^n} f+\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$

ולכן $\int^* f\circ T\le \int^* f+\varepsilon \longrightarrow \int^* f\circ T\le\int^* f$.

$g=f\circ T \longrightarrow \int^* g\le\int^* f$ ולכן $f=g\circ T^{-1} \longrightarrow \int^* f\le \int^* g$

כי T^{-1} אורתוג' וזה מה שהוכחנו תוספ לכן $\int^* f = \int^* f\circ T$ ...

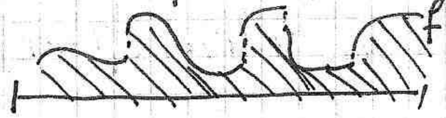
28/12/13 טז

המשך שיעור 11

המשך הוכחה: עבור f- נקבל עבור $f\circ T$ $\int_{*\mathbb{R}^n} f = \int_{*\mathbb{R}^n} f\circ T$ ולכן יש שוויון אינטגרלים

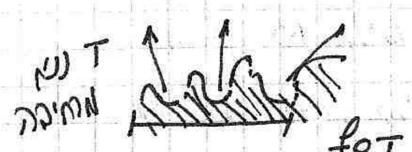
״החלפה שמורה ליניארית״ ←

משפט: תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ טרנספורמציה ליניארית הפיכה. אז לכל $E\subseteq\mathbb{R}^n$ אז E מדידה אמ״מ $T(E)$ מדידה, ואם כן אז $v(T(E)) = |\det T|\cdot v(E)$. יתר על כן! אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונ׳ חסומה בעלת תומך חסום



אז

$$\int^*_{\mathbb{R}^n} f = |\det T|\int^*_{\mathbb{R}^n} f\circ T$$



$$\int_{*\mathbb{R}^n} f = |\det T|\int_{*\mathbb{R}^n} f\circ T$$

הקדמה לשינוי
אינטואיציה כוללת:
חס-מינוס
והחלפה
נשמרת

T לוקחת קטע ארוך והמקור שלו הוא קטע קצר לכן ההר נהיה מקובץ הערכים בקטע קטן יותר

ואם f אינטגרבילית אז $f\circ T$ אינטגרבילית ומתקיים

$$|\det T|\int_{\mathbb{R}^n} f\circ T = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

נזכר בעובדה ← טענה: קיים בסיס $(a_1,\dots,a_n)$ אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ כך ש-$(T(a_1),\dots,T(a_n))$ הם בסיס אורתוגונלי!

נסמן $S_k=|T(a_k)|>0$ וזה נובע ש-T הפיכה ולכן $T(a_k)\neq 0$.

נגדיר $b_k=\frac{T(a_k)}{S_k}$ וקטור מנורמל. ולכן $T(a_k)=S_kb_k$

ולכן בבסיסים $(a_1,\dots,a_n)$! $(b_1,\dots,b_n)$ ההעתקה הנ״ל היא אלכסונית. אנחנו יכולים לעבור לעבוד בבסיסים אלה, כי ראינו ששינוי בסיס(סיבוב) בין שני אורתונורמליים לא משנה אינטגרל ומידה ולא הדטרמיננטה בערך מוחלט. לכן נעבור למערכת הקורדינטות החדשה נגה הוקטור $a_1x_1+\dots+a_nx_n$ מיוצג ע״י $(x_1,\dots,x_n)$. נתבונן ב-T הבאה

$T(x_1,\dots,x_n) = S_1x_1b_1+\dots+S_nx_nb_n$, $T(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{(S_1x_1,\dots,S_nx_n)}_{\text{קורדינטות בבסיס החדש}}$ ← ולכן מכיוון שראינו בשיעור הנ״ל, נקבל את הטענה הנדרשת.

כמו כן $S_1\cdots S_n = |\det T|$

20/12/13 §7 **המשך שיעור 11**

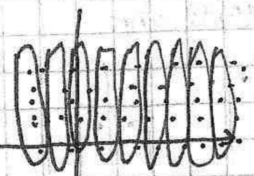
אינטגרל חוזר:

נזכר כי

$$\int f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f \overset{\text{סכום מכפלות פרבו.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} f(\varepsilon k,\varepsilon l) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\varepsilon\sum_{l\in\mathbb{Z}} f(\varepsilon k,\varepsilon l)\Big)$$

$$\overset{?}{=} \int dx\Big(\int dy\, f(x,y)\Big)$$

"שינוי סדר הסכימה"



⊖ האם אינטגרביליות של f מבטיחה אינטגרביליות של $f_x(y)=f(x,y)$?

⊖ האם אינטגרביליות של f מבטיחה אינטגרביליות של $x\mapsto\int f_x$?

⊖ האם $\iint = \int(\int)$?

⊖ האם קיום אינטגרל חוזר מבטיח קיום אינטגרל דו-ממדי.

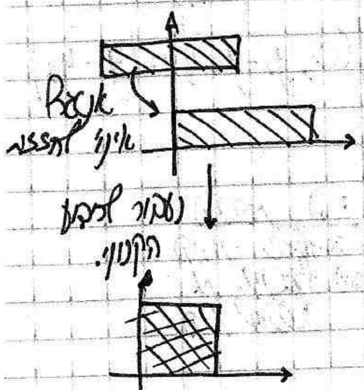
שיעור 12

משפט: תהי $f: B\to\mathbb{R}$ פונ' ליפשיץ כאשר $B=I_1\times I_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ [תיבה מרובע] [קטעים] אזי:

(א) $f_x: I_2\to\mathbb{R}$ פונ' ליפשיץ ב I_2 לכל $x\in I_1$ [ובפרט אינטגרביליות]

(ב) $x\mapsto\int_{I_2} f_x$ גם כן פונ' ליפשיץ ב I_1.

(ג) $\int_B f = \int_{I_1}\big(x\mapsto\int_{I_2} f_x\big)$ [אינטגרל דו-ממדי הוא כמו האינטגרל החוזר]



יהי אפשר שהוא בה"כ כי $B=[0,t]\times[0,z]$

כמו כן (נגדיר) $g(x,y)=f(tx,zy)$ ולכן g על התיבה $[0,1]\times[0,1]$. כמו כן מתקיים $g_x(y)=f_{tx}(zy)$

$$z\int_{[0,1]} g_x \overset{?}{=} \int_{[0,z]} f_{tx}$$ כן!

ולכן נקבל גם כי:

$$z\int_{[0,1]}\big(x\mapsto\int g_x\big) = \int_{[0,1]}\big(x\mapsto\int f_{tx}\big)$$

מ אינטגרביליות שוויון הקודם

כמו כן אנחנו
רצו אינוו קודם
את תכונת הליפשיץ
אבל אגף שמור
הקודם

$$t\int_{[0,1]}\big(x\mapsto\int f_{tx}\big) \overset{\text{אותו טיעון עבור הגבה גבולות}}{=} \int_{[0,t]}\big(x\mapsto\int f_x\big)$$

⊖ אבל מה שמעניין אותנו הוא

$$\int_{[0,t]}\big(x\mapsto\int_{[0,z]} f_x\big) = tz\int_{[0,1]}\big(x\mapsto\int_{[0,1]} g_x\big)$$ לכן סה"כ

לכן מספיק להוכיח עבור תיבה שהיא ריבוע היחידה.