17/12/13 69

# שיעור שבוע 10

**תזכורת:** מידת ג'ורדן:

$$\vartheta^*(E)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_E$$

[אם אין אינטגרביליות אז נגדיר מידה פנימית וחיצונית]

**תכונות של מידת ג'ורדן:**

1) אם $E\subseteq F$ אז $\vartheta^*(E)\le\vartheta^*(F)$ וגם $\vartheta_*(E)\le\vartheta_*(F)$

ובפרט במידה ו-$E$ ו-$F$ מדידות ג'ורדן אז $\vartheta(E)\le\vartheta(F)$

נובע ממונוטוניות האינטגרלים כי $\mathbb{1}_E\le\mathbb{1}_F$

2)

$$\vartheta^*(E\cup F)\le\vartheta^*(E)+\vartheta^*(F)$$

וזה ברור כי $\mathbb{1}_{E\cup F}\le\mathbb{1}_E+\mathbb{1}_F$ ומתכונות של אינטגרלים.

3)

$$\vartheta_*(E\uplus F)\ge\vartheta_*(E)+\vartheta_*(F)$$ לפחות

כי $\mathbb{1}_{E\uplus F}=\mathbb{1}_E+\mathbb{1}_F$, ואינטגרל תחתון של סכום גדול שווה מהאינטגרל התחתון.

אם $E,F$ מדידות ג'ורדן $\vartheta(E\uplus F)=\vartheta(E)+\vartheta(F)$

<u>כי:</u> $\vartheta(E)+\vartheta(F)\le\vartheta_*(E\uplus F)\le\vartheta^*(E\uplus F)\le\vartheta(E)+\vartheta(F)$

ולכן $\vartheta_*(E\uplus F)=\vartheta^*(E\uplus F)=\vartheta(E)+\vartheta(F)$.

4) <u>אינווריאנטיות להזזה:</u>

הזזת כל הנקודות ב-$x$

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_*(E+x)&=\vartheta_*(E)\\ \vartheta^*(E+x)&=\vartheta^*(E)\end{aligned}\right\}\longrightarrow$$ אינטגרל לא מושפע מהזזה

**טענה:** תיבה היא מדידת ג'ורדן ו- $\vartheta(B)=Vol(B)$ לכל תיבה $B$.

**הוכחה:** ידוע כי

$$vol(B)\overset{\text{מהגדרת האינטגרל}}{=}\int_B 1=\int_B\mathbb{1}_B$$

<u>לכן:</u>

$$\int_B\mathbb{1}_B\le\int_{*\,\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_B$$

[כי אינטגרל על כל המלבן מכיל האינטגרל הפנימי ומחוץ זה מתאפס...]

[למה אין שוויון? כי זה תיבה סגורה ולא פתוחה! כלומר בקצוות יש ערכים והם אי-שליליים...]

ולכן

$$vol(B)\le\int_{*\,\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_B$$

<u>מה שכן מתקיים:</u>

$$\int^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{B^\circ}=\int^*_B\mathbb{1}_{B^\circ}$$

[כי במקרה זה יש התאפסות על השפה כמו שהוכחנו בעבר]

ו-

$$vol(B)=\int^*_B 1\ge\int^*_B\mathbb{1}_{B^\circ}$$

17/12/13 ט"ז **המשך שיעור 10**

**למה:** יהא תיבה $B$ ויהא $\varepsilon>0$ קיימת תיבות $B_1,B_2$ כך ש $B_1\subset B^\circ\subset B\subset B_2^\circ$ וכך ש $vol(B_2)-vol(B_1)\le\varepsilon$

**הוכחה:** יהא $\delta$:
נסמן $B=[s_1,t_1]\times\ldots\times[s_n,t_n]$ אזי $B_\delta=[s_1-\delta,t_1+\delta]\times\ldots\times[s_n-\delta,t_n+\delta]$
הוא הגדלה/והקטנה קצת של התיבה בכל הכיוונים.

אזי
$$vol(B_\delta)=(t_1-s_1+2\delta)\cdot\ldots\cdot(t_n-s_n+2\delta)\xrightarrow{\delta\to 0}vol(B)$$

לכן בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $\delta$ מספיק קטן כדי שנקבל קצרה. [ניקח $\delta$ חיובי ושלילי כדי לקבל תיבה חוסמת מלמעלה ותיבה חוסמת מלמטה]

**המשך הוכחה:** יהא $\varepsilon>0$

$$\int^*_{\mathbb{R}^n}1\!\!1_{B_2^\circ}\overset{\text{מהגדרה}}{\le}vol(B_2)\overset{\text{מהלמה}}{\le}vol(B)+\varepsilon$$

לכן:
$$vol(B)\le v_*(B)\le v^*(B)\le v^*(B_2^\circ)\le vol(B)+\varepsilon$$

לכן משום שזה נכון לכל $\varepsilon$ נקבל $vol(B)\le v_*(B)\le v^*(B)\le vol(B)$

לכן
$$vol(B)=v_*(B)=v^*(B)$$

לכן מסקנה: אין חשיבות להאם זה כולל השפה או לא כולל השפה)
כלומר לשפה אין השפעה לאינטגרל!

**תרגיל:** $B^\circ$ אינטגרבילית ומדידה ג'ורדן ולכן $v(B^\circ)=vol(B)$

**למה:** שפה של תיבה, היא מדידה ג'ורדן ! $v(\partial B)=0$

**הוכחה** כי $1\!\!1_{\partial B}=\underbrace{1\!\!1_B}_{\text{אינטגרבילית}}-\underbrace{1\!\!1_{B^\circ}}_{\text{אינטגרבילית}}$ לכן גם ההפרש אינטגרבילי!

$$\int 1\!\!1_{\partial B}=\int 1\!\!1_B-\int 1\!\!1_{B^\circ}=0$$ כנדרש.

לכן $v(\partial B)=0$

**הגדרה:** $v^*(E)=0\longleftrightarrow E$ מדידה ! $v(E)=0$ [כי $0\le v_*\le v^*$]
וקבוצה כזו נקרא קבוצה ממידה אפס.

**למה:** אם $v^*(E)=0$ ! $F\subseteq E\longrightarrow v(F)=0$ [כי מידה מונוטונית להגדרה כפי שראינו]

17/12/13 71 ו

# המשך שיעור 10

<u>טענה:</u> אם $E_1,\dots,E_k$ קבוצות מידה אפס, אז האיחוד שלהן מידה אפס מבחינת הגדרה- אפסילונית.

<u>טענה:</u> אם T לינארית $T(x_1,\dots,x_n)=(s_1x_1,\dots,s_nx_n)$ אז מתקיים

$$v^*(T(E)) = s_1\dots s_n v^*(E) \;;\; v_*(T(E)) = s_1\dots s_n v_*(T(E))$$

<u>למה:</u> [קבוצה מידה אפס לא משפיעה על האינטגרל]

אם פונ' חסומות $f,g$ בעלות תומך חסום שוות פרט על קבוצה מידה 0 אז

$$\int_* f = \int_* g \;;\; \int^* f = \int^* g$$

<u>הוכחה:</u>

יהי $M$ כך ש $|f|\le M, |g|\le M$; ואז מתקיים $2M\mathbb{1}_E \ge |f-g|$

כאשר $E$ זו הקבוצה שבה $f$ ו-$g$ לא מסכימות.

$E=\{x / f(x)\ne g(x)\}$

<u>ולכן:</u>

$$\int^*|f-g| \le 2M\int^* \mathbb{1}_E = 0$$

כי נתון שהמידה ז'ורדן של E היא אפס

<u>ונשים לב:</u> $g = f+(g-f)$ ולכן $g\le f+|g-f|$

ולכן

$$\int^* g \le \int^* f + \underbrace{\int^*|g-f|}_{0} \longrightarrow \int^* g\le \int^* f$$

ובאופן סימטרי $\int^* f \le \int^* g$ ולכן $\int^* f = \int^* g$.

עבור אינטגרל תחתון נקבל ע"י $-f$ ו-$-g$, כנדרש.

<u>טענה:</u>

אם $f\le g$ בכל מקום פרט לקבוצה זניחה אז $\int_{\text{רימן}} f \le \int_{\text{רימן}} g$

וכן הלאה לגבי שאר התכונות שהוכחנו לאינטגרלים.

<u>אפיון הבעיה בשפת החלוקה:</u> ברגע שחלקה השפה של החלוקה הן קבוצות זניחות אז איחוד קבוצה זניחה, ולכן ניתן לתת סופ/אינפימום רק על הבסיס של כל תיבה בחלוקה, ולהזניח את השפה! כי זה סכום סופי של הבסיס, ומבניהם את המידה השפה של הקבוצה מידה אפס.

17/12/13 בס"ד

# המשך שיעור 10

נפח אפס הוא אינו תכונה שמורה בטופולוגיה.

**פונקציה מדרגות:**

פונ' שהיא קומבינציה לינארית סופית של אינדיקטורים על תיבות.

סכומי על ידי פונקציות מדרגות

אם ניקח אז פונ' מדרגות מתחת לפונ' $f$ נקבל כי

כי זה בדיוק סכומי דרבו כי זה למעשה חסם על כל החלוקה.

$$\begin{cases} \int_* f = \sup\limits_{\substack{g \le f \\ \text{פונ' מדרגות}}} \int g \\ \int^* f = \inf\limits_{\substack{f \le g \\ \text{מדרגות}}} \int g \end{cases}$$

← כל פונ' מדרגות היא אינטגרבילית...

כלומר ניתן לעשות סכומי על פונ' מדרגות.

לכן $f$ אינטגרבילית אמ"מ לכל $\varepsilon$ קיימות $g, h$ פונ' מדרגות כך ש $g \le f \le h$ ו $\int h - \int g \le \varepsilon$ כי רק נקבל שוויון $\int^* f = \int_* f$

**תרגיל:** פונ' רציפה היא אינטגרבילית. [כי היא רציפה במ"ש בקבוצה סגורה]

**תרגיל:**

תהי $f \equiv Id$, צריך לחשב $\int_{[0,1]} f$.

**תרגיל:** נגדיר פונ' $f((0.\beta_1\beta_2\ldots)_2) = (0.\beta_1\beta_3\beta_5\ldots)_2$

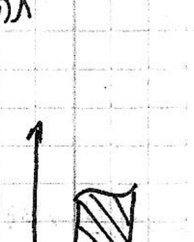
צריך להוכיח של $f$ אינטגרבילית ב$[0,1]$ וצריך לחשב את $\int_{[0,1]} f$

**טענה:**

תהי $B$ תיבה, $f: B \to [0,\infty)$ (כלומר $f$ אי"ש) חיובית אינטגרבילית, אז $E = \{(x,t) \in B \times [0,\infty) \mid t \le f(x)\}$

קבוצה מדידה ז'ורדן! $v(E) = \int_B f$ ← השטח של הפונ' מתחת לגרף...

השטח מתחת לגרף



**הוכחה:** לכל חלוקה $P$ של $B$ נגדיר

$$E_P^+ = \biguplus_{C \in P} C \times [0, \sup_{C^\circ} f] \longrightarrow v(E_P^-) = \sum_{C \in G} vol(C) \cdot \inf_{C^\circ} f$$

$$E_P^- = \biguplus_{C \in P} C \times [0, \inf_{C^\circ} f] \longrightarrow v(E_P^+) = \sum_{C \in G} vol(C) \sup_{C^\circ} f$$

$E_P^-, E_P^+$ מדידות כאיחוד זר סופי של תיבות מדידות

מזניחים מה שקורה בקצוות החלוקה...

מתקיים $E_P^- \subset E \subset E_P^+$ לכן $v(E_P^-) \le v_*(E) \le v^*(E) \le v(E_P^+)$

הקבוצה הנוצרת היא $\biguplus_{C \in P} C$

17/12/13 ג-7

# המשך שיעור 10

המשך ההוכחה: אז $v(E_P^-) = L_0(f,P)$ ו- $v(E_P^+) = U_0(f,P)$

לכן:

$$\int_{*B} f = \sup_P L(f,P) \le v_*(E) \le v^*(E) \le \inf_P U_0(f,P) = \int_B^* f$$

ומשום ש $f$ אינטגרבילית נקבל

$$v_*(E) = v^*(E) = \int_B f$$

ולכן $E$ מדידה והאינטגרל הוא הנפח שלה!

תרגיל: נסמן $\Gamma_f = \{(x,t) \mid t = f(x)\}$ כאשר $f$ אינטגרבילית, אז צריך להוכיח כי $\Gamma_f$ זניחה.

תרגיל: $E_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$, צריך להוכיח כי $v(E_r) = r^n v(E_1)$; וכמו כן

$$v(E_r) \le e^{-n(1-r)} v(E_1)$$


[כלומר המשמעות שבמימדים גבוהים רוב הנפח של הכדור נמצא בסביבה קטנה של השפה...]

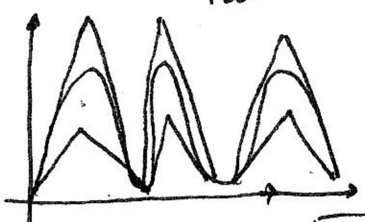
## אינטגרל ע״י פונקציות רציפות

הגדרה: פונ' $f$ תהא רציפה ליפשיץ עם קבוע $L$ אם לכל $x,y$ מתקיים $|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$; (פונ' $f$ תהא ליפשיץ אם קיים $L$ כזה)

פונ' ליפשיץ בפרט רציפה ולכן אינטגרבילית.

טענה: תהי $B \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה ו- $f: B \to \mathbb{R}$ ~~אינטגרבילית~~ חסומה אז

$$\int_B^* f = \inf_{\substack{h \ge f \\ \text{ליפשיץ}}} \int h \quad ; \quad \int_{*B} f = \sup_{\substack{g \le f \\ g \text{ ליפשיץ}}} \int_B g$$

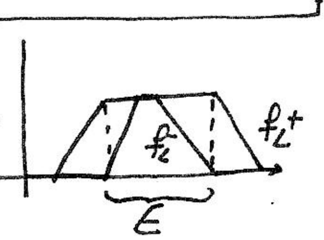


$$f_L^+(x) = \sup_y \left(f(y) - L|x-y|\right)$$

$$f_L^-(x) = \inf_y \left(f(y) + L|x-y|\right)$$

האלמנטים הדבוקים ביותר, וזה מגדיר פונ' ליפשיץ שנמצאת מעליה. זו הפונ' התחתונה ביותר שמעל $f$.

הערה: המעטפת הדיוקה ביותר מבין כל הפונ' ליפשיץ שנמצאות מעל $f$?




בפרט עבור פונ' $f$ אינדיקטור של קבוצה $E$, אז

$$f_L^+(x) = \underbrace{1 - L\,dist(x,E)}$$

או אפס... כלומר המקסימום בינה לאפס.

$$f_L^-(x) = L \cdot dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E)$$

או 1, לוקחים מינימום.

כאן משום שמרחק מקבוצה שווה למרחק מהסגור שלה. הפונ' שנקבל תהא האינדיקטור של $E$!

17/12/13 ע"ד

# תרגול שבוע 10

**הגדרה:** קבוצה ממידה ג'ורדן היא ממידה אפס אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ ניתן לכסות אותה ע"י מספר סופי של קופסאות $C_i$ כך ש $\sum_{i=1}^{n} vol(C_i) < \varepsilon$

**תרגיל:** תהי $f:k\to\mathbb{R}$ רציפה, $k\subseteq\mathbb{R}^n$, הראה כי $\Gamma(f)$ היא ממידה ג'ורדן אפס. כאשר $\Gamma(f)$ הוא הגרף של הפונ' כאשר $\Gamma(f)\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$

**פתרון:** תהי $B\subseteq\mathbb{R}^n$ קופסא, כך ש $k\subseteq B$ [$k$ קומפקט]. $f$ רציפה במ"ש ב $k$! לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $|x-y|<\delta$ ! $x,y\in k$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

תהי $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של $B$ לקופסאות כך שהקוטר של כל $C_i$ קטן מ $\frac{\delta}{2}$.
בכל $C_i$ ~~...~~ כך ש $C_i\cap k\neq\emptyset$ נבחר נקודה $c_i\in C_i$ שנסמנה ונתבונן ב

$$P=\left\{C_i\times\left[f(c_i)-\varepsilon,\ f(c_i)+\varepsilon\right]\right\}_{i=1}^{n}$$

[כי לכל נקודה קרובות מספיק ערכים קרובים $\varepsilon$...]
מהיות $f$ רציפה במ"ש נקבל כי $\Gamma_f\subseteq P$
ולכן $P$ כיסוי סופי של $\Gamma_f$ ומקיים

$$\sum_{i=1}^{n} vol^{n+1}\left(C_i\times[f(c_i)-\varepsilon,f(c_i)+\varepsilon]\right)=\sum_{i=1}^{n}vol^{n}(C_i)\cdot 2\varepsilon=vol(B)2\varepsilon$$

ולכן היינו בוחרים מראש $\tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{2vol(B)}$.

**תרגיל:** יהי $U$ פתוח וחסום, ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ ! $f\in C^1(U)$ אזי נסמן $E=\{x\in k \mid f(x)=0\}$ [נשים לב שזה קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקט] כאשר $k\subseteq U$ קומפקט
ונניח כי לכל $x\in E$ מתקיים $\nabla f_{(x)}\neq 0$. הוכיחו כי $E$ ממידה ג'ורדן אפס.

**פתרון:** נקח $x\in E$ מאחר $\nabla f\neq 0$ ! קיים $i$ כך ש $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\neq 0$
אז לפי משפט הפונ' הסתומה בסביבת $x$ ניתן לבטא את $x_i$ כפונקציה של $\{x_j\}_{j=1,\ j\neq i}^{n}$ ולכן ~~...~~ כמסקנה מהטענה הקודמת בסביבה $U_x$ של $x$
$U_x\cap E$ היא גרף של פונ' רציפה [אפילו $C^1$] ולכן ממידה אפס. ולכן יש כיסוי של $E$ בקבוצות פתוחות, ולכן ושכיסוי סופי כי $E$ קומפקט. ולכן יש כיסוי סופי מקבוצות ממידה אפס ולכן ממידה אפס.

17/12/13 

## המשך תרגול 10

תרגיל: הראו ש $\{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} \le 1\}$ מדידה ג'ורדן. כלומר הכדור היחידה הוא מדיד.

פתרון: נשים לב כי

$$S^n = \{0 \le x_d \le \sqrt{1-(x_1^2+\dots+x_{d-1}^2)}\}$$

$$\uplus \{0 > x_d \ge \sqrt{1-(x_1^2+\dots+x_{d-1}^2)}\}$$

וכל אחת מהן מדידה כשאת מתחת לגרף של פונ' רציפה! [עם כמה מינוס...]

[ועם כדי הצדקה; הקבוצה השניה גם זו קבוצה מן אפס...]

הערה: לכל $k \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים $k \times \{0\}$ היא ממידה אפס ב $\mathbb{R}^{n+1}$

19/12/13

## שיעור שבוע ט

תזכורת: ניסינו לחסום מלמעלה ומלמטה פונ' ע"י פונקציות ליפשיץ, ובפרט רציפות.
כמו כן ראינו שאפשר לכל $L$ לבחור $f_L^+$ , $f_L^-$ שבין הליפשיץ-$L$ הטובה והמתאימה "הטובה" ביותר שחוסמות את $f$.

⊖ כמו כן ראינו את $f_L^+$ ו $f_L^-$ של פונ' אינדיקטור.

⊖ נשים לב שצריך מכאן לדבר על תיבות כי לא ברור איך מאפסים פונ' ליפשיץ מחוץ לתיבה שלו מבלי לפגוע בליפשיצות או בחסם.

נזכר שעבור $E$ קבוצה

$$(\mathbb{1}_E)^+_L(x) = \dots \operatorname{dist}(x,E) = \operatorname{dist}(x,\bar{E})$$

כי המרחק מקבוצה הוא כמו המרחק לסגור שלה.

$$(\mathbb{1}_E)^-_L(x) = \dots \operatorname{dist}(x, B\setminus E) = \operatorname{dist}(x, B\setminus E^\circ)$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases} (\mathbb{1}_E)^+_L = (\mathbb{1}_{\bar{E}})^+_L \\ (\mathbb{1}_E)^-_L = (\mathbb{1}_{E^\circ})^-_L \end{cases}$$

אם נשים לב שהחסם כאן לא נכון. סגור הוא לשנות חסם תחתון ועליון וכולל לשנות חסם עליון.

תכונות:

⊖ אם $f \le g$ בתיבה $B$ אז $f^+_L \le g^+_L$ , $f^-_L \le g^-_L$ [מיידי מההגדרה]

⊖ אם $L_1 \le L_2$ כלומר ליפשיצות חזקה יותר אז $f^+_{L_1} \ge f^+_{L_2}$ ; $f^-_{L_1} \le f^-_{L_2}$ [ברור...]

ככל שהקבוע גדול יותר הקירוב טוב יותר

19/12/13    76    **המשך שיעור 10**

**תרגיל:** תהי תיבה $B$ ! $G \subseteq B$ תת-תיבה ויהי $c\in\mathbb{R}$

$$\int_B (c\cdot \mathbb{1}_G)^+_L \xrightarrow[\text{יורד}]{L\to\infty} c\cdot vol(G)$$

פונ' רציפה ולכן אינטגרבילית

$$\int_B (c\cdot \mathbb{1}_G)^-_L \xrightarrow[\text{עולה}]{L\to\infty} c\cdot vol(G)$$

**למה:** פונ' $f$ מתיבה $B$ כאשר $f$ פונ' מדרגות

$$\int_B f^-_L \xrightarrow{L\to\infty} \int_B f \quad ; \quad \int_B f^+_L \xrightarrow{L\to\infty} \int_B f$$

פונ' מדרגות מקבלת ערך קבוע על מספר סופי של קבוצות

**הוכחה:** משום ש $f$ פונ' מדרגות נקבל $f=\sum_{C\in P} f(C)\cdot \mathbb{1}_{C^\circ}$ ← [מזניחים את מה שקורה בשפה]

קבוצה על המעטפת...

מספר סופי של איברים זו לא פונ' ליפשיץ

**נשים לב כי:**

$$f \le \sum_{C\in P} (f(C)\mathbb{1}_{C^\circ})^+_L \in Lip(NL) \quad [\text{where } N \text{ is } |P|]$$

כל פונ' ומרגפת (?) ובסכום הסופי

לכן! זו פונקציה $NL$ ליפשיץ שגדולה מ $f$

לכן! $$f \le f^+_{NL} \le \sum (f(C)\mathbb{1}_{C^\circ})^+_L$$

מתכונת אופטימליות של $f^+_{NL}$

אם $\varphi\in Lip_{L_1}$, $\psi\in Lip_{L_2}$ ולכן $\varphi+\psi\in Lip_{L_1+L_2}$

לכן מתכונת האינטגרל

$$\int_B f \le \int_B f^+_{NL} \le \int_B \sum (f(C)\mathbb{1}_{C^\circ})^+_L = \sum_{C\in P}\int_B (f(C)\mathbb{1}_{C^\circ})^+_L$$

לינאריות האינטגרל...

סכום סופי של גבולות

מהתרגיל, כאשר $L\to\infty$ נקבל
$$\sum_{C\in P}\int_B (f(C)\mathbb{1}_{C^\circ})^+_L \longrightarrow \sum_{C\in P} f(C)\, vol(C) = \int_B f$$

כי זו פונ' מדרגות ולכן זה האינטגרל שלה...

מהסנדוויץ' שקיבלנו

לכן נקבל כי $$\int_B f \xleftarrow{L\to\infty} \int_B f^+_{NL}$$

לכן $$\int_B f \longleftarrow \int_B f^+_L$$

וכמובן שעבור $f^-_L$ זה באופן דומה לחלוטין.

19/12/13 דף 7

# תרגול שיעור 10

**טענה:** תהי פונ' חסומה $f:B\to\mathbb{R}$ מקיים

$$\int_B f_L^+ \downarrow {}^*\!\int_B f$$

ובנוסף

$$\int_B f_L^- \uparrow \int_{*B} f$$

**הוכחה:** ברור שמתקיים לפי הגדרה כי $f_L^+ \ge f$ ולכן! $\int_B f_L^+ \ge {}^*\!\int_B f$

ולכן גם! $\lim_{L\to\infty}\int f_L^+ \ge {}^*\!\int_B f$ משמירת א"ש בגבול.

כאשר הגבול קיים ממונוטוניות וחסימות.

תהי h פונ' מדרגות כך ש $h\ge f$ אז $\int_B f_L^+ \le \int_B h_L^+ \longrightarrow \int_B h$

האינט' הוא המונוטוני במקום ליפשיץ...

ולכן! $\lim_{L\to\infty}\int_B f_L^+ \le \int_B h$ לכל h מדרגות כנ"ל.

ומשום שזה נכון לכל h נקבל $\lim_{L\to\infty}\int_B f_L^+ \le \inf\int_B h = {}^*\!\int_B f$

כי כל אינטגרל כזה הוא ספק עליון ולכן הגענו שלום זה האינטגרל..

ולכן האינ' א"ש שוויון ולכן $\lim_{L\to\infty}\int f_L^+ = {}^*\!\int_B f$

וכנ"ל עבור תחתון.

ולכן תהי פונ' חסומה המתאימה עם ליפשיצית היא טוב.

ולכן פונ' f היא אינטגרבילית אמ"מ $\left(\int f_L^+ - \int f_L^-\right) \xrightarrow[\text{ליפ'}]{L\to\infty} 0$

ולכן פונ' f אינטגרבילית אמ"מ $\forall\,\varepsilon>0$ קיימות פונ' $h, g$ ליפשיץ כך ש $g\le f\le h$

! $\int_B g - \int_B h \le \varepsilon$

**תרגיל:** הוכח כי פונ' f אינטגרבילית אמ"מ $\forall$ קיימות פונקציות ליפשיץ $f_1, f_2, \dots$ כך ש ${}^*\!\int_B |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ; כלומר פונ' היא אינטגרבילית אמ"מ היא גבול אינטגרלי של פונ' ליפשיץ.

**טענה:** תהי $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונ' ליפשיץ.. ; $\varphi(0)=0$ ותהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

אז $\varphi\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גם כן אינטגרבילית.

**הוכחה:** ניקח תיבה B כך ש f מאופס מחוץ ל B! [כי f אינטגרבילית ולכן במובן שלה תומך] ולכן גם מהנתון $\varphi(0)=0$ אז $\varphi\circ f$ גם כן מאופס מחוץ ל B! ניקח L כך ש $\varphi$ היא ליפשיץ -L. ניקח $f_n$ פונ' ליפשיץ כך ש ${}^*\!\int|f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ [קיים כי f אינטגרבילית] אז

$${}^*\!\int|\varphi\circ f_n - \varphi\circ f| \le {}^*\!\int_B L|f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty}$$

19/12/13 עד

## המשך שיעור 10

ולכן $0 \longrightarrow \|\varphi\circ f-\varphi\circ f_n\|^*$ ! ו-$\varphi\circ f_n$ היא פשוטה כהרכבה של פשוטות.

לכן $\varphi\circ f$ אינטגרבילית לפי הקריטריון שראינו.

**תרגיל:** להראות לפי $\varphi(f(\cdot),g(\cdot))$ כאשר $f,g$ אינטגרביליות ! $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ רציפה ! $\varphi(0,0)=0$

24/12/13

## שיעור מס' 11

**תרגיל:** אם $f$, $g$ אינטגרביליות צריך להוכיח ש $\min(f,g)$ ! $\max(f,g)$ ! $f\cdot g$ אינטגרביליות.

**תרגיל:** אם קבוצות $E,F$ מדידות ז'ורדן אז גם $E\cup F$ גם $E\cap F$ ! וגם $E\setminus F$ קבוצה מדידה ז'ורדן.

נובע מ"ה מהסעיף הקודם.

**הגדרה:** תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונ' אינטגרבילית מקומית [כלומר אינטגרבילית בכל $B\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה] ! $E\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה ז'ורדן אז

אינטגרל של פונ' בקבוצה ללא ... בהגבלה...

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot 1_E = \int_E f$$

[וזה קיים כי המכפלה אינטגרבילית כי כל אחת מהן אינטגרבילית מקומית, ולכן המכפלה אינטגרבילית מקומית אבל גם בעלת תומך חסום. לכן אינטגרבילית]

*אינטגרבילית מקומית - בכל תיבה היא אינטגרבילית! למשל כל אחת פונ' ב $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא אינטגרבילית מקומית אבל לא בכל $\mathbb{R}$. פונ' היא אינט' אמ"מ היא אינטגרבילית מקומית ובעלת תומך חסום

ולכן: $$\int_{E\uplus F} f = \int_E f + \int_F f$$ [מלינאריות האינטגרל והאינדיקטור... $1_{E\uplus F}=1_E+1_F$]

⊖ לכן האינטגרל המוגדר נותן לנו פונ' קבוצה כמו שרצינו...

**נפח קבוצות מדידות ז'ורדן:**

$$v^*(E)=\lim_{l\to\infty}\int(1_E)^+_l \longleftarrow$$ [מעטפת עליונה של פונ' ליפשיץ...]

כמו שראינו $(1_E)^+_l=(1_{\bar E})^+_l$ ולכן $v^*(E)=v^*(\bar E)$ ☺

**כמו כן:**

$$v_*(E)=\lim_{l\to\infty}\int(1_E)^-_l$$

כמו כן $(1_E)^-_l=(1_{E^\circ})^-_l$

ולכן $v_*(E)=v_*(E^\circ)$ ☺