הרצ'ה תרגול 9

משפט המונוטוניות: (כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב)

תרגיל:

נגדיר סדרה (a_n) באופן רקורסיבי: $a_1=\sqrt{2}\ ;\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$

הראו כי (a_n) מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון:

① הסדרה מונוטונית עולה - הוכחה באינדוקציה:

בסיס $n=1$: $a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2\sqrt{2}}=a_2$ ✓. נניח ש- $a_n<a_{n+1}$ ל- n מסוים.

צ"ל $a_{n+1}<a_{n+2} \Leftrightarrow a_{n+1}<\sqrt{2a_{n+1}} \Leftrightarrow a_{n+1}^2<2a_{n+1}$ ~~(הערה: השתמשנו ש- $a_n>0$)~~

$\sqrt{2a_n}<\sqrt{2a_{n+1}}$

כיוון שמונוטוני בשורש $\downarrow$ $\sqrt{a_n}<\sqrt{a_{n+1}}$ $\quad a_n>0$

$a_n<a_{n+1}$

נכון מהנחת האינדוקציה.

② הסדרה חסומה מלמעלה: **טענה:** $\forall n\in\mathbb{N}:\ a_n<2$

הוכחה באינדוקציה: בסיס: $a_1=\sqrt{2}<2$ ✓

נניח ש- $a_n<2$ ל- n מסוים ונוכיח $\sqrt{2a_n}=a_{n+1}\overset{?}{<}2$

$\sqrt{a_n}\overset{?}{<}\sqrt{2}$

$a_n<2$ נכון לפי ההנחה.

מ- ①+② נובע ש- a_n מתכנסת לגבול סופי (משפט מונוטוניות). ונסמנו L.

חישוב L: הסדרה מקיימת $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$

שני האגפים מגדירים סדרות מתכנסות, כשנקח גבול נקבל: $L=\sqrt{2L}$

$L(L-2)=0 \Rightarrow L=0\ ,\ L=2$

כיוון ש- $\sqrt{2}=a_1<a_n$ לכל n לכן $L=0$ נפסל ונקבל: $L=2$ ∎

המספר e:

טענה: הסדרה $(1+\frac{1}{n})^n$ מתכנסת. סימון: $e:=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

הוכחה: הוכחנו טענת עזר: $(1+\frac{1}{n})^n<3$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

לכן הסדרה שלנו חסומה ע"י 3 מלמעלה. נראה שהסדרה עולה: $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$

$$\sqrt[n+1]{a_n}=\sqrt[n+1]{\underbrace{(1+\tfrac{1}{n})\cdot(1+\tfrac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1+\tfrac{1}{n})}_{n\ \text{פעמים}}\cdot 1}\ \underset{\text{אי"ש הממוצעים}}{\le}\ \frac{1+(1+1/n)+(1+1/n)+\ldots+(1+1/n)}{n+1}=\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}=$$

$$=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}\Longrightarrow a_n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$$

הוכחנו עולה + חסומה מלמעלה לכן a_n מתכנסת ∎

<u>מתקיים</u> 3: $\underset{\text{א"ש ברנ'}}{2 \le} e \underset{\text{הוכחנו}}{<} 3$

<u>טענה</u>: נתונה (m_n) סדרת מספרים טבעיים, $m_n \to \infty$.

אז: $\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \to e$ (נזכיר: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$).

<u>הוכחה</u>: כיוון ש- $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$ אז: $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ \forall k>N_0$: $\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right| < \varepsilon$ ⊛

יהי $\varepsilon>0$. ~~כיוון ש~~ נמצא את N המובטח מ- ⊛. כיוון ש- $m_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

קיים N_1 טבעי כך ש- $\forall n>N_1: m_n > N$

$$\Downarrow \text{⊛ + } m_n \text{ טבעית}$$

$$\left|\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e\right| < \varepsilon$$

כלומר: לכל ε בחרנו אינדקס N_1 שמקיים את הגדרת הגבול ■

<u>טענה</u>: לכל סדרה a_n כך ש- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ מתקיים: $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} e$.

<u>הוכחה</u>: נשים לב שלמספרים טבעיים $m_n\to\infty$ מתקיים:

$$e = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1}}$$

$$\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1}}{\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)} \to \frac{e}{1} \qquad \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n}\cdot\left(1+\frac{1}{m_n}\right) \to e\cdot 1$$

נחזור ל- a_n שלנו. נסמן $m_n = \lfloor a_n \rfloor$ (הנ"מ $a_n > 0$ נניח זאת).

$$e \leftarrow \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} \to e$$

מסנדביץ' יש: $\left(1+1/a_n\right)^{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} e$ ■

<u>דוגמה</u>: חשב את: $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-4}$

$$a_n = \left(\frac{2n-1+2}{2n-1}\right)^{3n-4} = \left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{3n-4} = \left(1+\frac{1}{n-1/2}\right)^{3n-4} = \left[\left(1+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right]^3 \cdot \left(1+\frac{1}{n-1/2}\right)^{-5/2}$$

$$\xrightarrow[\text{מחשבון גבולות + טענה שהוכחנו}]{n\to\infty} e^3 \cdot 1^{-5/2} = \boxed{e^3}$$

<u>אפיזודת סיום</u>: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

הסבר: $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \to \frac{1}{e}$

בדומה, ניתן להראות שאם $a_n \to \infty$ אז: $\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to \frac{1}{e}$.

המשך חדו"א תרגול 9

תתי סדרות וגבולות חלקיים

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ונניח ש- (n_k) סדרת טבעיים עולה ושואפת ל- $+\infty$.
אז $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ היא **תת סדרה** של a_n.

<u>משפט</u>: סדרה a_n מתכנסת ל- L $\Leftrightarrow$ כל ת"ס שלה מתכנסת ל- L. (סופי/אין סופי)

<u>הגדרה</u>: L **גבול חלקי** של a_n אם קיימת ת"ס של a_n שמתכנסת ל- L.

<u>מסקנה מהמשפט</u>: אם ל- a_n יש לפחות 2 גבולות חלקיים שונים אז"א היא מתבדרת.

<u>סימון</u>: $P(\{a_n\})$ - קב' כל הגבולות החלקיים הסופיים של a_n
$\hat{P}(\{a_n\})$ = גבולות חלקיים, כולל אינסופיים.

<u>משפט (בולצאנו ויירשטרס)</u>:
(א) לכל סדרה חסומה יש ת"ס מתכנסת (לגבול סופי)
(ב) לכל סדרה שאינה חסומה (מלמעלה) יש ת"ס מתכנסת ל- $\infty(+)$.

<u>תרגיל</u>:
נתונה סדרה a_n כך שלכל ת"ס שלה (a_{n_k}) קיימת ת"ס $(a_{n_{k_l}})$ המתכנסת ל- a. הוכיחו כי $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

<u>פתרון</u>: נניח בשלילה ש- a_n אינה מתכנסת ל- a, כלומר:
$$\exists \varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N: |a_n-a|>\varepsilon \quad (*)$$
נמחר את ε המובטח. נבנה ת"ס באופן הבא:
$N=1 \xrightarrow{*} \exists n_1>1: |a_{n_1}-a|>\varepsilon$ (יוגדר כ- n_1)
$N=n_1 \xrightarrow{*} \exists n_2>n_1: |a_{n_2}-a|>\varepsilon$
וכן הלאה. כלומר נבנה סדרת טבעיים עולה כך ש- $\forall k\in\mathbb{N}: |a_{n_k}-a|>\varepsilon$
מהנתון, ל- a_{n_k} יש ת"ס $a_{n_{k_l}}$ שמתכנסת ל- a, אבל באותו זמן
$\forall l\in\mathbb{N}: |a_{n_{k_l}}-a|>\varepsilon$
וזו סתירה $\blacksquare$

<u>הגדרה שקולה לגבול חלקי סופי</u>:
$L\in\mathbb{R}$ גבול חלקי של a_n אם: $\forall\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N: |a_n-L|<\varepsilon$

תרגיל: לרשום הגדרה כזו למקרה של $L=\pm\infty$.

תרגיל:

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה: $a_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)^n$

פתרון:

⊛ $a_{3k} = (\cos(k\pi))^k = ((-1)^k)^{3k} = (-1)^{3k^2}$

ניתן להסיק ש- $\{1,-1\} \subseteq P(a_n)$, ומתקיים: $a_{6k} \to 1$, $a_{6k+3} \to -1$.

⊛ $a_{3k+1} = \left(\cos\frac{(3k+1)\pi}{3}\right)^{3k+1} = \left((-1)^k \cdot \frac{1}{2}\right)^{3k+1} \xrightarrow[\text{(כסנדוויץ' עם } (\frac{1}{2})^{3k+1})]{k\to\infty} 0$

⊛ $a_{3k+2} = \left((-1)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

קיבלנו $\{0,1,-1\} \subseteq P(a_n)$

מדוע אין אחרים?