

תורת הגבול 8 חידודים

משפטים חדשים ומיוחדים

מבחן המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, \quad (n) \text{ תורה } 0 < a_n$$

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow \infty & \Leftrightarrow 1 < L \\ a_n \rightarrow 0 & \Leftrightarrow L < 1 \\ \text{פ. ד. 3 ו' 1} & \Leftrightarrow L = 1 \end{aligned}$$

מבחן השוואה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \quad n) \text{ תורה } a_n > 0$$

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow \infty & \Leftrightarrow 1 < L \\ a_n \rightarrow 0 & \Leftrightarrow L < 1 \\ \text{פ. ד. 3 ו' 1} & \Leftrightarrow L = 1 \end{aligned}$$

הוכחת מבחן המנה: (להוכחתו של מבחן השוואה)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

וכן הוכחת סדרה של קרייט-אנגל (כגון) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$
 נכין שתי ק"מ תעו. מבחן השוואה ונכין להפסיק ולסיים.

דוגמה: $a_n = n^\alpha q^n$ עבור $|q| < 1$, $\alpha > 0$

נראה ש- $a_n \rightarrow 0$ כה נקודת $|a_n| \rightarrow 0$

נשים את מבחן המנה על $|a_n|$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^\alpha |q|^{n+1}}{n^\alpha |q|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot |q| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1^\alpha \cdot |q| = |q| < 1$$

חסכון
עבורה (פ. ד.)
החזק חזקה

$\Leftrightarrow$ מבחן המנה $\Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow a_n \rightarrow 0$ (כגון).

בדומה, אינו $q > 1$ ה"נו מקבלים $a_n \rightarrow +\infty$ ($q < -1$ הסדרה מתחלפת).

משפט Stolz: (תענו) $(x_n), (y_n)$ סדרות כך ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L, \quad y_n \rightarrow \infty \text{ סדרה מונוטונית עולה נמש,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L \quad \text{אם:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

דוגמה: נחשב את הפסוק

הפתרון: נציב $y_n = n^3$, $x_n = 1^2 + \dots + n^2$ תעו. משפט סטולץ נ"מ.

כי $y_n \rightarrow \infty$ מונוטונית עולה נמש, ופסוק (הנ"ל) ק"פ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

ההכרזה:

הוכחת מבחן שטור:

נכתוב את המבחן שטור (המבחן השלישי) (3'17):

$$\left[\begin{array}{l} \text{שטור: } a_n \rightarrow L, 0 < t_n \leq 1 \text{ כן } 0 \\ \sum_{k=1}^n t_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ \sum_{k=1}^n t_k a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \\ \text{שטור: } \end{array} \right]$$

אנו בוחנים שטור. שטור סדרה a_n "ע"

$$t_n = y_n - y_{n-1}, t_1 = y_1, a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, a_1 = \frac{x_1}{y_1}$$

כיוון ש y_n מוגדר עולה ממש, המסקנות חזק"י (סדרה t_n שפחות 1 - נקרא)

בנוסף: $\sum_{k=1}^n t_k = y_1 + y_2 - y_1 = y_n$ ומתקבל $y_n \rightarrow \infty$ קנוני מתקבל $a_n \rightarrow L$

אם $a_n \rightarrow L$ ו $y_n \rightarrow \infty$ אז $\sum_{k=1}^n t_k a_k \rightarrow L$

$$\sum_{k=1}^n t_k a_k = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = x_n - x_0$$

המסקנה: y_n

מסקנה: הקטע מוגדר הומוגן: $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow L$ כנראה!

משפט (המסקנות) (3'17) סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת למס' סופי

ס' סדרה מונוטונית מתכנסת סמוך (המס' סופי או $\pm \infty$)

תכשיר: תורכי חוכי הסדרה $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ מתכנסת.

$$\begin{aligned} \text{הוכחה: נבדוק את ההפרש} & a_n - a_{n+1} \\ \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} & - \left(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ & = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ & = \frac{1}{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

מכאן ש a_n מונוטונית עולה. ב' נדרשות ש a_n חסומה למעלה.

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \leq n \cdot \frac{1}{n+1} < 1 \text{ כנראה.}$$