3/11/13

חדו"א תרגול 7

משפטים על קיום וחישוב גבולות:

① שמירת אי שוויונים בגבול:

החל ממקום מסוים

משפט: "אי שוויון חלש נשמר בגבול" - (מעתה a_n, b_n) סדרות $a_n \le b_n$ המ"מ

ו- $a_n \to a$, $b_n \to b$ אזי $a \le b$ ($a_n < b_n$ ⚠ $\not\Rightarrow$ $a < b$)

שאלה: נתון $a \le b$ האם $a_n \le b_n$ המ"מ?

לא! אם $a=b$ אפשר למצוא דוג' נגדית: $a=b=0$, $a_n=\frac{2}{n}$; $b_n=\frac{1}{n}$

שאלה 2: נתון $a<b$, האם $a_n<b_n$ המ"מ?

כן! **הוכחה:** כיוון ש- $b_n\to b$, מהגדרת הגבול עבור $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$

נקבל: $\exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1: |b_n-b|<\frac{b-a}{2}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{b+a}{2}=b-\frac{b-a}{2}<b_n<b+\frac{b-a}{2}$$

בדומה, כיוון ש- $a_n\to a$: $\exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2: |a_n-a|<\frac{b-a}{2}$

$$\Downarrow$$

בפרט: $a_n<a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}$

כה"כ ל- $n>\max\{N_1,N_2\}$ נקבל $a_n<\frac{a+b}{2}<b_n$ ■

② משפט הסנדוויץ':

משפט: (צורה של גבולות סופיים) $a_n\le b_n\le c_n$ המ"מ

ומתקיים $c_n\to L$, $a_n\to L$ אזי $b_n\to L$ ($L\in\mathbb{R}$)

משפט: (סנדביץ' ל- ∞) $a_n\le b_n$ המ"מ ומתקיים $a_n\to+\infty$

אזי $b_n\to\infty$.

הוכחה: הנתונים הם:

(I) $\exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1: a_n\le b_n$

(II) $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2: M<a_n$

צ"ל: $\forall R\in\mathbb{R}\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ \forall n>N_0: b_n>R$

אכן, יהי $R\in\mathbb{R}$. ~~[illegible]~~ מבחירת $M=R$ ב-(II) נקבל: $\exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2: R<a_n$

כעת נבחר $N_0=\max\{N_1,N_2\}$ ונקבל $n>N_0$ יתקיים: $R\overset{II}{<}a_n\overset{I}{\le}b_n$ ■

(הכדרה אפסה כפול חסומה הגבול אפסה)

דוגמה: מהו הגבול הבא -

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{\cos(2^n)\sqrt[5]{n^3}}{n+1}$$

חסומה ←   → סדרה אפסה

פתרון: כנדבק' לכל n: $-1 \le (-1)^n \cdot \cos(2^n) \le 1$

ולכן: $\underbrace{\frac{-\sqrt[5]{n^3}}{n+1}}_{\to 0} \le a_n \le \underbrace{\frac{\sqrt[5]{n^3}}{n+1}}_{\to 0}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/5}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{2/5}}}{1+\frac{1}{n}} = 0$$

אז גם $a_n \to 0$ ∎

דוגמה 2: חשבו גבול: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ מהו $\lim_{n\to\infty} a_n$?

~~נסיון~~ 1: חשבון גבולות - כל מחובר $\to 0$ אז הגבול $=0$

/!\ לא נכון !! יש אין סוף מחוברים אז זה לא נכון.

נסיון 2 (פתרון): $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}} = 1 \qquad \Downarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

מכנדבק' $a_n \to 1$.

③ גבולות וממוצעים:

משפט צ'זרו (Cezaro): $a_n \to a$ (כאשר a סופי או אין סופי)

אז: $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = a$$

במילים: ממוצעים חשבוניים של סדרה המתכנסת ל-a גם כן מתכנסים ל-a.

דוגמא: חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n} = b_n$

פתרון 1: נזכר: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ולכן $b_n = \frac{n+1}{2} \to \infty$

פתרון 2: נגדיר $a_n = n$ $(1,2,3 \dots)$ ו- $b_n = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$

כיוון ש- $a_n \to \infty$ נובע מצ'זרו ש- $b_n \to \infty$.

הוכחת משפט צ'זרו:

⊛ מקרה 1: $a \in \mathbb{R}$: בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח $a=0$,

כיוון שאחרת נתבונן ב- $c_n = a_n - a \xrightarrow{\text{חשבון גבולות}} 0$ ועבורה יהיה נובע המשפט

$$\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\dots+(a_n-a)}{n} = \frac{a_1+\dots+a_n}{a} - a \xrightarrow[\text{משפט}]{n\to\infty} 0$$

כלומר: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n} - a\right) = 0$

אבל אי אפשר לעשות אריתמטיקה של גבולות כי לא ידוע שהגבול $\frac{a_1+\dots+a_n}{n}$ קיים

אז נוסיף a לשני האגפים:

$$a = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n} - a\right) + \lim_{n\to\infty} a \overset{\text{חשבון}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)$$

3/11/13

המשך חדו"א תרגול 7

הוכחת צ'זרו כש- $a=0$:

כי $a_n \to 0$

יהי $\varepsilon>0$. קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n>N_1: |a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

מס' קבוע

נבחר $N_2>N_1$ טבעי כך ש- $\forall n>N_2: \left|\frac{a_1+\dots+a_{N_1}}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

עבור $n>N_2$, נקבל:

$$\left|\frac{a_1+\dots+a_n}{n}-0\right| = \left|\frac{a_1+\dots a_{N_1}+ a_{N_1+1}+\dots+a_n}{n}\right| \underset{\uparrow}{\le} \left|\frac{a_1+\dots+a_{N_1}}{n}\right| + \frac{|a_{N_1+1}|+\dots+|a_n|}{n}$$

אי שוויון המשולש מוכלל

עפ"י בחירת N_2

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{(n-N_1)}{n}}_{\le 1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}+1\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

■

⊛ מקרה 2: a אינסופי

בה"כ (בלי הגבלת הכלליות: $a=+\infty$ ($a=-\infty$ נוכיח באופן דומה).

$a_n\to\infty \Leftarrow \exists N_0\in\mathbb{N}\ \forall n>N_0: a_n>0$

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \frac{a_1+\dots+a_{N_0}}{n} + \frac{a_{N_0+1}+\dots+a_n}{(n-N_0)}\cdot\frac{(n-N_0)}{n}$$

$$\exists N_1>N_0\ \forall n>N_1\ \underbrace{\frac{a_1+\dots+a_{N_0}}{n}}>-1$$

$\frac{1}{n}\to 0$ שכן כי המונה לא משתנה

יהי: $M\in\mathbb{R}$.

$$\exists N_2>N_1\ \forall n>N_2\ a_n>2M$$

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \frac{a_1+\dots+a_{N_0}}{n} + \frac{a_{N_0+1}+\dots+a_{N_2}}{n} + \frac{a_{N_2+1}+\dots+a_n}{n} > -1+0+\frac{2M\cdot(n-N_2)}{n} =$$

$$= -1+2M\left(1-\frac{N_2}{n}\right)$$

אם נדאג ש- $1-\frac{N_2}{n}>\frac{1}{2}$

$\frac{N_2}{n}<\frac{1}{2}$

$n>2N_2$

אז נקבל $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \underset{\uparrow}{>} -1+2M\cdot\frac{1}{2}=M-1$ וזה מספיק ■

$\forall n>2N_2$

משפט הממוצע הנדסי: אם $a_n\to a$ אז גם $\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\xrightarrow{n\to\infty} a$

כאשר $\forall n\ a_n>0$

הוכחה:

ממוצע הרמוני

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \overset{①}{\le} \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \le \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$$

אי שוויון

קודם כל, ממוצעים:

(הוכחה של ①: אי שוויון ממוצעים עבור $\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$: $\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n} \underset{\text{הופכי}}{\Longleftrightarrow} \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$)

מצ'זרו, אגף ימין שואף ל- a. נראה שאגף שמאל גם ניתן להשתמש בצ'זרו

(נעשה את המקרה $a\ne 0$, $a\ne\infty$ – $a=0$ – קבוע):

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)}{n}} \xrightarrow{\text{מצ'זרו}} \frac{1}{\frac{1}{a}}=a$$

מסודבק! סיימנו! ■

תרגיל (משפט בנמבר):

טענה: $\forall n\in\mathbb{N}: x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=C$ אז גם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=C$

⚠ רק כיוון!

הוכחה:

נגדיר סדרת עזר: $y_n=\begin{cases}\frac{x_{n}}{x_{n-1}}, & n>1\\ x_1, & n=1\end{cases}$.

מהנתון. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim \frac{x_n}{x_{n-1}} = C$

לכן מהמשפט על ממוצע גיאומטרי: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1\cdot\ldots\cdot y_n}=C$

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\sqrt[n]{x_n}$$

כלומר קיבלנו $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=C$ כנדרש! ∎

דוגמה: נחשב $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

פתרון: נגדיר $x_n=\binom{2n}{n}>0$. נחשב גם:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}}=\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=\cancel{4n^2}\frac{2(2n+1)}{n+1}=\frac{2(2+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}}\to 4$$

וממשפט בנמבר, גם $\lim\sqrt[n]{x_n}=4$.

מבחן שורש ומבחן מנה להתכנסות:

משפט ("מבחן השורש") - תהי $a_n>0$ סדרה חיובית, ונניח $\sqrt[n]{a_n}\to L$ $(0\le L\le\infty)$

אזי:
- עבור $L<1$ אז $a_n\to 0$
- עבור $L>1$ אז $a_n\to +\infty$
- עבור $L=1$ אז לא ידוע דבר..