

30/10/13

# חדו"א תרגולי 6

## כדורים וחיתוכי גרפים

① חוקי חסכון של סקוט סטיינר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 - n^5 + 4}{3n^7 - 2n^6 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^7}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^7})}{(3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^6})} = \frac{1}{3}$$

בזמא:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^7}) = 1$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^6}) = 3$

הערה: למעשה בהיסק  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$  יש שימוש בחסכון סקוט סטיינר.

## שימוש בסקוט סטיינר

כך גם אלו הם: ①  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$  אם  $a > 0$

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

③  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

④  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$  עבור  $c > 0$

⑤  $q^n \rightarrow 0$  עבור  $-1 < q < 1$   
 $q^n \rightarrow 1$  עבור  $q = 1$   
 $q^n \rightarrow +\infty$  עבור  $q > 1$   
 $\{q^n\}$  מתבדרת עבור  $q \leq -1$

(הכללה):  $q^n \rightarrow 0$  עבור  $-1 < q < 1$ ,  $a > 0$

הוכחה:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

נשים לב:  $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{n} \geq 1$  (כאן)  $\sqrt[n]{n} = 1 + d_n$  כש  $d_n > 0$

מכאן:  $d_n \rightarrow 0$  כש  $n \rightarrow \infty$

(כיון: נשתמש בא"ש בינוני)

$$\left( \begin{aligned} n &= (1 + d_n)^n \geq 1 + n \cdot d_n \\ 1 - \frac{1}{n} &= \frac{n-1}{n} \geq d_n \end{aligned} \right)$$

כאמור:  $d_n \leq 1 - \frac{1}{n}$  כל מספר טבעי

②: נשתמש בבינוני:  $n = (1 + d_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_n^k \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} d_n^2$   
 $\frac{n-1}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} d_n^2 / (n-1)$   
 $\frac{1}{2} \geq d_n^2$

③: נבחר  $\epsilon > 0$  ונמצא  $N \in \mathbb{N}$  כזה ש  $d_n < \epsilon$  עבור  $n > N$

$|d_n| < \epsilon$  כל  $n > N$  כי  $0 \leq d_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$  כל  $n > N$

כל  $n > N$ :  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \epsilon$  כל  $n > N$

כל  $n > N$ :  $N = \left\lceil \frac{2}{\epsilon^2} \right\rceil$



תשובה: 16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^{2n+3} \cdot n^5} = 16$$

$$\sqrt[n]{4^{2n+3} \cdot n^5} = \sqrt[n]{4^{2n} \cdot 4^3 \cdot n^5} = 4^2 \cdot \sqrt[n]{4^3} \cdot (\sqrt[n]{n})^5 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4^2 \cdot 1 \cdot 1^5 = 16$$

חסכון סקטור  
חסכון מוכרי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5n+2} - \sqrt{n^2+n+1}) = 2$$

תשובה: 2

$$\sqrt{n^2+5n+2} - \sqrt{n^2+n+1} = \frac{n^2+5n+2 - n^2-n-1}{\sqrt{n^2+5n+2} + \sqrt{n^2+n+1}} = \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+5n+2} + \sqrt{n^2+n+1}}$$

(חוק מונה ומכנה כ-n)

$$\downarrow \frac{1}{4 + \frac{1}{n}} \quad \boxed{a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}} \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{4}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{4}{2} = 2$$

חסכון סקטור

הערה: בנוסף לחסכון סקטור, ישנו חוק לחזקות:

$$a > 0, a \neq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = a^x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n)^{1/n} = a^{x/n}$$

טענה:  $a_n \rightarrow 0$  !-  $(b_n)$  סדרה חסומה אז  $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(כ-M:  $\forall n, |a_n| \leq M$ )

(סדרה אפסית לפי חסומה זו סדרה אפסית)

הוכחה: כיוון ש-  $a_n \rightarrow 0$ , וזכור:  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N: |a_n| < \epsilon$

כיוון ש-  $b_n$  חסומה:  $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N}: |b_n| \leq M$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N: |a_n b_n| < \epsilon$  (3)

יהי  $\epsilon$ . נבחר  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{M}$ . מהנתון:  $\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1: |a_n| < \frac{\epsilon}{M}$

ואז  $n > N_1$  אז  $|a_n b_n| \leq |a_n| \cdot M < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$

כלומר  $N = N_1$  סתירה טובה.