27/10/13

תרגול 5 - חדו"א

חסמים:

תרגיל: מצאו (אם קיימים) sup, inf של $C=\{\frac{m}{n}+\frac{4n}{m} \mid n,m\in\mathbb{N}\}$

האם יש min, max ?

פתרון:

* **טענה:** $\sup C$ לא קיים (C לא חסומה מלמעלה).

הוכחה: ע"י הצבת $m=1$, נקבל כי $\forall n\in\mathbb{N}: 4n+\frac{1}{n}\in C$. נניח בשלילה כי הקבוצה C חסומה, ויהי M חסם עליון שלה, עלינו למצוא $c\in C$ כך ש- $c>M$.

אכן נבחר את האיבר שבנוי כך: $n=\lceil |M| \rceil$ ו- $m=1$. $c=4\lceil |M|\rceil+\frac{1}{\lceil |M|\rceil}$.

* **טענה:** $\inf C=4$

הוכחה: מאי-שוויון הממוצעים: $\frac{\frac{m}{n}+\frac{4n}{m}}{2}\geq\sqrt{\frac{m}{n}\cdot 4\frac{n}{m}}=\sqrt{4}=2$ $\quad\forall m,n\in\mathbb{N}$:

$\frac{m}{n}+\frac{4n}{m}\geq 4$

כלומר: $\forall c\in C: c\geq 4$ וכן $4\in \underline{B_C}$.

נראה ש- $4\in C$ ואז ינבע הטענה מהגדרה ש- $\inf C=\min C=4$:

אכן: ננסה למצוא n,m כך ש- $\frac{m}{n}=4\frac{n}{m}$

$m^2=4n^2=(2n)^2$

$m=2n$

נבחר $m=2$, $n=1$ ונקבל את האיבר: $c=\frac{2}{1}+\frac{4\cdot 1}{2}=4$ ✓

■

תרגיל 2: עבור $A,B\subseteq\mathbb{R}$ נגדיר $A+B:=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$

הוכיחו כי אם B,A חסומות מלעיל אז גם $A+B$ חסומה מלעיל

ומתקיים: $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

פתרון:

נסמן $\alpha=\sup A$, $\beta=\sup B$ (קיימים וסופיים מהנתון + אקסיומת השלמות).

(א) נראה ש- $\alpha+\beta$ חסם מלעיל של $A+B$: ידוע ש- $\forall a\in A: a\leq\alpha$ (כי $\alpha\in\overline{B_A}$)
$\forall b\in B: b\leq\beta$ (כי $\beta\in\overline{B_B}$)

$\Downarrow$

כלומר: $\forall a\in A, b\in B\quad a+b\leq\alpha+\beta \xRightarrow{\text{כנדרש}} \forall c\in A+B: c\leq\alpha+\beta$

(ב) צ"ל: $\forall\varepsilon>0\ \exists c\in A+B: c>\alpha+\beta-\varepsilon$

כלומר: $\forall\varepsilon>0\ \exists a\in A, b\in B: a+b>\alpha+\beta-\varepsilon$

ידוע: מכך ש- α חסם עליון טוב ביותר של A, $\forall\varepsilon_1>0\ \exists a\in A: a>\alpha-\varepsilon_1$ וכן עבור β .

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$, עבור $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$ קיים $a\in A: a>\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$ וכן קיים $b\in B$ כך ש- $b>\beta-\frac{\varepsilon}{2}$
ולכן $a+b>\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+\beta-\frac{\varepsilon}{2}=\alpha+\beta-\varepsilon$ ומכאן ש- $\alpha+\beta$ אכן טוב ביותר ■

סדרות וגבולות:

סדרה היא אוסף עם אינדקס טבעי - לכן עם סדר: $a_1,a_2,\dots(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

הגדרה: גבול של סדרה

נאמר ש- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$ ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ אם:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: |a_n-L|<\varepsilon$ (נוסח ע״פ קושי Cauchy)

תרגיל: הוכיחו מהגדרת הגבול כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n-\sqrt{n}-3}=\frac{1}{2}$

(**תרגיל:** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. עלינו למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n>N: |\frac{1}{n^2}|<\varepsilon$

נפתור את אי השוויון $\frac{1}{n^2}=|\frac{1}{n^2}|\overset{?}{<}\varepsilon$

$$n^2\overset{?}{>}\frac{1}{\varepsilon}$$

$$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$ לכן אם נבחר $N=\lceil\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\rceil+1$

יתקיים הדרוש)

פתרון: צ״ל:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: \left|\frac{n-1}{2n-\sqrt{n}-3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \quad ⊛$$

יהי $\varepsilon>0$. עלינו לבחור $N\in\mathbb{N}$ כך שאי שוויון ⊛ מתקיים לכל $n>N$.

נפשט את ⊛:
$$\left|\frac{n-1}{2n-\sqrt{n}-3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n-2-2n+\sqrt{n}+3}{4n-2\sqrt{n}-6}\right|=\left|\frac{1+\sqrt{n}}{2(2n-\sqrt{n}-3)}\right|$$

טענה: לכל n מתקיים $2n-\sqrt{n}-3$ (ניתן להוכיח באינדוקציה)

והמונה חיובי לכל $n\in\mathbb{N}$ לכן נוריד את הערך המוחלט.

$$\frac{1+\sqrt{n}}{2(2n-\sqrt{n}-3)}\leq\frac{\cancel{2}\sqrt{n}}{\cancel{2}(2n-\sqrt{n}-3)}\leq\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\overset{?}{<}\varepsilon$$

בעבור $n\geq 36$

(* בדיקה: $2n-\sqrt{n}-3\overset{?}{\geq}n$

$\overset{x=\sqrt{n}}{\Leftrightarrow} n-\sqrt{n}-3\geq 0$ $\quad x^2-x-3\geq 0$ מחקירה זה נכון ל- $x\geq x_2$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 3}}{2}$

מוודא נכון ל- $x\geq 6$.)

$$\Leftarrow \quad \sqrt{n}>\frac{1}{\varepsilon} \quad\Leftarrow\quad n\overset{?}{>}\frac{1}{\varepsilon^2}$$

סוף: נבחר $N=\max\{37,\lceil\frac{1}{\varepsilon^2}\rceil\}$

המשך תרגול 5 חדו"א:

שלילה של התכנסות:

(שלילת ההגדרה- בתרגיל הקודם) = **התבדרות**

איך מנסחים שסדרה לא מתכנסת ל- L?

$$\exists \varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N: |a_n-L|\geq\varepsilon$$

במילים: יש סביבה של L, שמחוץ לה נמצאים אין סוף מאיברי הסדרה.

סדרה שואפת לאינסוף:

<u>הגדרה:</u> נאמר ש- $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ (גבול במובן הרחב) אם:

$$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: a_n>M$$

<u>תרגיל:</u> $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=\infty$

<u>הוכחה:</u> יהי $M\in\mathbb{R}$. צריך למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n>N: \sqrt[3]{n}>M$

אם $M\leq 0$ נבחר $N=1$.

אם $M>0$ צריך $\sqrt[3]{n}\overset{?}{>}M \iff n\overset{?}{>}M^3$ נבחר $N=\lceil M^3\rceil$

ואכן $\forall n>\lceil M^3\rceil=N: \sqrt[3]{n}>M$ כנדרש. ■

<u>תרגיל:</u> <u>טענה:</u> $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$

<u>טענת עזר:</u> $\forall n\in\mathbb{N}: \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

<u>פתרון:</u>
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

הבינום של ניוטון

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k\text{ איברים}}}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k\text{ פעמים}}}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{k}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\underset{k!\geq 2^{k-1}}{\leq}2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=$$

$$=1+\underbrace{1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}}_{\text{סכום סדרה הנדסית}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3$$ ■

<u>חזרה לפתרון התרגיל:</u>

<u>הוכחה:</u> נראה כי ☺ $\forall n\in\mathbb{N}: \sqrt[n]{n!}\overset{?}{>}\frac{n+1}{3}$

$$\Updownarrow$$

$$n!\overset{?}{>}\frac{(n+1)^n}{3^n}\iff 3^n\overset{?}{>}\frac{(n+1)^n}{n!}$$

ואכן-

$$3^n\underset{\text{לפי טענת עזר}}{>}\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}=$$

$$=\frac{(n+1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{(n+1)^n}{n!}$$ ●

נסיים בעזרת ☺: יהי $M\in\mathbb{R}$. נמצא אינדקס $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n>N: \sqrt[n]{n!}>M$

ע"פ ☺, מתקיים: $\sqrt[n]{n!}>\frac{n+1}{3}\underset{\text{מספיק}}{\overset{?}{>}}M \iff n>3M-1$ נבחר $N=\max\{1,\lceil 3M-1\rceil\}$

והוא מקיים את הדרוש. ■

חשבון גבולות סופיים 8

נתונות סדרות a_n, b_n כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

אז גם הגבולות הבאים קיימים:

- חיבור/חיסור: $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- כפל: $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
- חילוק: עבור $b\neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

  $b_n \neq 0 \Leftarrow$ לפחות החל מאינדקס מסוים

תזכורת: חישבתם בכיתה כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

מכאן יודעים: $\frac{1}{n^3} = \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{n}} \cdot \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{n}} \cdot \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{n}} = 0$