תרגול 4 חדו"א

תרגיל 3:

$B = \left\{ \frac{1}{x-1} \mid x \in (2,\infty) \right\}$

מצאו sup, inf של הקב' הבאה (הוכחה בדרך ק"מ):

האם יש max, min ?

פתרון:

טענה: $\sup B = 1$

הוכחה: • 1 חסם מלעיל של B:

$\forall b \in B: b \overset{?}{\leq} 1$

$\forall x > 2: \frac{1}{x-1} \overset{?}{\leq} 1$

$1 \overset{?}{\leq} x-1$

$2 \leq x$ ✓

• 1 חסם מלעיל טוב ביותר. כלומר $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in (2,\infty): 1-\varepsilon \overset{?}{<} \frac{1}{x-1}$

יהי $\varepsilon > 0$. נמצא $x > 2$ כך ש- $1-\varepsilon \overset{?}{<} \frac{1}{x-1}$, $0 < (x-1)$

$(1-\varepsilon)(x-1) \overset{?}{<} 1$

אם $\varepsilon < 1$ אז נמשיך כך:

$x - 1 < \frac{1}{1-\varepsilon}$

$x < 1 + \frac{1}{1-\varepsilon}$

יש x כזה שהוא גם ב- $(2,\infty)$ כי מתקיים: $2 < 1 + \frac{1}{1-\varepsilon}$ (מתקיים כי $\varepsilon > 0$)

אם $\varepsilon \geq 1$: רצינו $\underbrace{1-\varepsilon}_{\text{מספר ב-}(-\infty,0]} < \frac{1}{x-1}$ וגם $x > 2$. במקרה זה כל $x > 2$ יעבוד.

הבחנה: בהוכחת חסם טוב ביותר, ניתן להניח:

$\forall \boxed{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \ \exists b \in B: M - \varepsilon < b$ $(M = \sup B)$

טענה: $\inf B = 0$

הוכחה: • 0 חסם מלרע של B.

$\forall x > 2: \frac{1}{x-1} > 0$

$x - 1 > 0$ ✓

• 0 חסם טוב ביותר: כלומר $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in B: b < \varepsilon$ $\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists x > 2: \frac{1}{x-1} < \varepsilon\right)$

$\Updownarrow \varepsilon > 0$

$x - 1 \overset{?}{>} \frac{1}{\varepsilon} \longleftrightarrow x \overset{?}{>} 1 + \frac{1}{\varepsilon}$

נבחר למשל $x = 2 + \frac{1}{\varepsilon} > 2 > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ כנדרש. ✓

לסיכום: • האם $\sup B = 1 \in B$?

$\exists x \in (2,\infty): 1 = \frac{1}{x-1}$

$x - 1 = 1$

$\Downarrow$

אין max.

$x = 2$ לא בקבוצת האינדקסים

• האם $\inf B = 0 \in B$?

$0 \overset{?}{=} \frac{1}{x-1}$

$0 = 1$ ✗.

תכונת ארכימדס: $\forall x>0, y\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}: nx>y$

<u>הוכחה</u>: כיוון ש- $0<x$ ניתן לחלק בו: $\forall x>0, y\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}: n>\frac{y}{x}$

יהי $x>0$ כלשהו, $y\in\mathbb{R}$. הוכחנו בשיעור שעבר שהקבוצה $\mathbb{N}$ אינה חסומה.

כלומר: $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}: n>M$

בפרט, עבור $M=\frac{y}{x}$ יש $n\in\mathbb{N}$ כנדרש. ■

מסקנה 1: צפיפות הרציונליים: בין כל שני מס' ממשיים קיים רציונלי

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, x<y\ \exists q\in\mathbb{Q}: x<q<y$$

<u>הוכחה</u>: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$, $x<y$. כלומר $0<y-x$.

מעקרון ארכימדס: $\exists n\in\mathbb{N}: n(y-x)>1$.

$ny-nx>1$

לכן קיים $m\in\mathbb{Z}$ כך ש- $nx<m<ny$

$\Leftarrow x<\frac{m}{n}<y$ נבחר $q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ ■

מסקנה 2: צפיפות האי-רציונליים: בין כל שני מס' ממשיים יש אי-רציונלי.

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, x<y\ \exists r\notin\mathbb{Q}: x<r<y$$

<u>הוכחה</u>: מהמסקנה הקודמת: $\exists q\in\mathbb{Q}: \frac{x}{\sqrt{2}}<q<\frac{y}{\sqrt{2}}$

$\Updownarrow$

$x<\sqrt{2}q<y$

נבחר $r=\sqrt{2}\cdot q$ והוא אי-רציונלי, שכן אחרת:

$\frac{m}{n}=q\sqrt{2}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}=\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{q}\in\mathbb{Q}$

סתירה. ■

<u>תרגיל</u>: הראו כי לקבוצה הבאה אין חסם עליון טוב ביותר ב- $\mathbb{Q}$:

אז לכן הקבוצה חסומה

$C=\{q\in\mathbb{Q}: q^2\le 2\}$ ← ב- $\mathbb{Q}$ יש sup ב- $\mathbb{Q}$!

<u>הוכחה</u>: נחשוב על C כתת-קבוצה של $\mathbb{R}$ ואז יש sup מאקסיומת השלמות (C חסומה למשל ע"י $4,\sqrt{2}$) והוא יחיד.

<u>טענה</u>: $\sup C=\sqrt{2}$ לאחר הוכחת הטענה, ברור כי אין sup ב- $\mathbb{Q}$ כי $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ ומצפיפות הרציונליים.

<u>הוכחת הטענה</u>: • $\sqrt{2}$ חסם מלעיל. • טוב ביותר: $\forall\varepsilon>0\ \exists q\in\mathbb{R}: (q^2\le 2)\wedge(q>\sqrt{2}-\varepsilon)$

מהצפיפות של הרציונליים, יש מס' רציונלי q כך ש- $\sqrt{2}-\varepsilon<q\le 2$ כנדרש.

$q^2<2$