

# חדו"א - תרגור 3

ערך מוחלט

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

3.10.16 פתרון:  $x \in \mathbb{R}$  נתון:  $|x-3| > |x-4|$  (הכונה)  $x \in \mathbb{R}$

פתרון: נחזיק 3-5 מקרים

1)  $x < 3$  :  $3-x > 4-x$   $\Rightarrow 3 > 4$   $\Rightarrow$   $\emptyset$

$2x > 7$

$x > 3\frac{1}{2} \Rightarrow 3\frac{1}{2} < x < 4$

$3\frac{1}{2} < x$

סה"כ

2)  $3 \leq x < 4$  :  $x-3 > 4-x$   $\Rightarrow 2x > 7$   $\Rightarrow x > 3\frac{1}{2}$

$3 > 4$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4 \leq x$

א. שוויון המשולש:

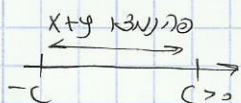
$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$

טענה: אם  $x, y \in \mathbb{R}$  מתקיים:

הוכחה (רש א. השוויון הימני):

(שים דגש):  $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|$

$\forall y \in \mathbb{R} : -|y| \leq y \leq |y|$



$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

$|x+y| \leq c = |x|+|y|$  (מהעצמת ערך מוחלט)

## חוסרים רציונליים וציון חסרים

מספרים רציונליים:  $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$

מספרים (m, n)

ה"צד" בתור מנה אינו יחיד, אבל כל מספר רציונלי יש "צד" מוצפן יחיד

טענה:  $\sqrt{3}$  אינו רציונלי.

הוכחה: נניח קיימת  $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$  אז קיימים  $m, n \in \mathbb{N}$  כך ש-  $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$

וכן כך ש-  $m, n$  זרים (לזירה מובחנת).

נעזר בהיכוס ונקודת:  $3n^2 = m^2 \Leftrightarrow 3 \mid m^2$  ("3 מחלק את  $m^2$ ")

כיוון ש-3 הוא ראשוני נקבע ש-  $3 \mid m$

(הכספי של מס' ססעי יש פירוק למכפלת ראשוניים:

$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$

$m^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_k^2$

$p_i$  ראשוניים  $1 \leq i \leq k$  (ראו דיוקא שונים), ועוד

כיוון ש-3 מחלק מכפלה זו, הנוכחית אחת הזוהרים (הראשוניים מהם) נלקח

$3 = p_i$   $\exists i \in \{1, \dots, k\}$   $3 \mid m$

המשך

המשך הוויכוח:

$$\exists k \in \mathbb{N} : m = 3k$$

← 31m

$$3n^2 = (3k)^2$$

$$3n^2 = 9k^2 \quad | :3$$

-5 יהיה  $\otimes$

$$3|n \Leftrightarrow 3|10^3 \cdot 937 \cdot 101, 3|n^2 \Leftrightarrow n^2 = 3k^2$$

מכאן 3-2 נחלק ~~מחלק~~ את  $n$  ונקבל את  $m$  כסדרה של  $n$  ו- $m$   $n$   $sp$

פיתוח עשרוני :

$$\underbrace{a}_{\text{IDU}} \cdot \underbrace{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots}_{\text{for } 0, 1, \dots, 9}$$

$$= a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

$$: \text{NIB}$$

2  $r \in \mathbb{R}$  ויש מינימום

חילוק אלוף 3

$$\begin{array}{r}
 3.142857 \\
 \hline
 22 \phantom{00} \boxed{7} \\
 -21 \phantom{00} \\
 \hline
 10 \phantom{00} \\
 -7 \phantom{00} \\
 \hline
 30 \phantom{00} \\
 -28 \phantom{00} \\
 \hline
 20 \phantom{00} \\
 -14 \phantom{00} \\
 \hline
 60 \phantom{00} \\
 -56 \phantom{00} \\
 \hline
 40 \phantom{00} \\
 -35 \phantom{00} \\
 \hline
 50 \phantom{00} \\
 -49 \phantom{00} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

יחס בין מספרים  
 בין מספרים

$$0, a_1, \dots, a_k, a_1, \dots, a_k, \dots = 0, \overbrace{a_1, \dots, a_k}^{3 \mid 150}$$

תשובה: מספיק הנו רצונות" א"מ" י"ש"ו "צח רצונות" מחזורי (החל ממקום  
פ"ח).

$$X = a \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_k \cdot \overline{b_1 \dots b_\ell} \iff X \in \mathcal{B} : \text{נת' סדור}$$

$$(a \in \mathbb{N}, a_1, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{B}, a \neq 0)$$

דוגמה:  $X \in \mathbb{Q}$  ניתן צייט  $X = \frac{m}{n}$  כאשר  $m, n$  מס' טבעי.

נמצא חיזוק ארוך ש  $m \leq n$ . (השארם קט שים  $n$ ).  $0 \leq r \leq n-1$ . (כנסו חזר מחשבים)

כיוון שהוא רק  $n$  מספרים, נאמר אם ביותר  $n+1$  שמים סודיות (חזרה)

זשאורט שינטי באני. מאן ווירליך מחזורי.

$$X = a.a_1.a_k \overline{b_1.b_e} \text{ - 0, n' ) } (\Rightarrow)$$

$$X = a + 0 \cdot a_1 + \dots + a_k + \underbrace{0 \cdot 0 \dots 0}_{y \text{ zeros}} b_1 \dots b_e \rightarrow 0 \dots 0 b_1 \dots b_e \cdot 10^{-y} = \underbrace{0 \cdot b_1 \dots b_e}_{y} \cdot 10^{-k}$$

צ'י פונקציות -  $y \in \mathbb{Q}$

$$10^l \cdot y = \overbrace{b_1 \dots b_l \cdot b_1 \dots b_l} = \overbrace{b_1 \dots b_l} + y \Rightarrow (10^l - 1)y = \overbrace{b_1 \dots b_l} \cdot \overbrace{10^l - 1} \cdot y \in \mathbb{D}$$

מכיוון שהמ' הרציונאליים זהו שדה המסור זרחקור ולכן  $X \in \mathbb{A}$ .

# חסמים

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ .  $A$  נקראת חסומה מלמעלה אם:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq M$$

$M$  כזה נקרא חסם מלמעלה של  $A$ .

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \geq m$$

כזוהי,  $A$  נקראת חסומה מלמטה אם:

$m$  כזה נקרא חסם מלמטה.

$A$  חסומה אם היא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה.

## מינימום ומקסימום

(כזוהי  $\min A$ )  
הזכרנו:  $x = \max A$  אם

$$\forall a \in A : a \leq x \wedge x \in A$$

סגור: אם קיים מקסימום אז הוא יחיד.

תחתית: נניח כשנייה כי  $x, y \in A$  מקסימום של  $A$ .

כיוון ש-  $x$  מקסימלי  $\forall a \in A : a \leq x$  ובפרט כיוון ש-  $y \in A$  נובע:  $y \leq x$ .

כזוהי, כיוון ש-  $y$  מקסימלי  $\forall a \in A : a \leq y$  ובפרט:  $x \leq y$  ומכאן:  $y = x$ .

## סופרם (סוף ביותר) - Supremum

תהי  $A$  חסומה מלמעלה.  $M = \sup A$  אם: (מ סופרם)  $\forall a \in A : a \leq M$   
(הסוף ביותר)  $\forall M' \in \mathbb{R} : M \leq M' \Rightarrow M = \min \overline{A}$   
כלומר:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : a > M - \varepsilon$

כלל לחסם תחתון סופרם ביותר:  $m = \inf A$

דוגמאות:

①  $(a, b)$  - כאילו הכיתה:  $\inf(a, b) = a, \sup(a, b) = b$

② אם קבוצה  $A$  יש מקסימום, אז מתקיים:  $\max A = \sup A$

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה חסומה מלמעלה יש סופרמום.

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

תרגיל: מצא  $\sup$ ,  $\inf$  של הקבוצה  
הוא  $\max, \min$ .

פתרון: נראה ש-  $\sup A = \frac{1}{2}$ . מכיוון ש-  $\frac{1}{2} \in A$  ו-  $\frac{1}{2}$  זהו האיבר הגדול ביותר (עבור  $n=2$ )

נראה ש-  $\frac{1}{2}$  סופרם מלמעלה:  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$

המשך

עבור  $n \in \mathbb{N}$

$$\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k \quad \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2} \quad k \geq 1$$

כל  $n \in \mathbb{N}$   $n \neq 0$

$$\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k+1 \quad \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} < 0 \leq \frac{1}{2}$$

$$\min A = \inf A = -1$$

$$n=1 \quad -1 \in A$$

\*  $-1$  הוא הסף (כלומר  $n=1$  הוא מספר טבעי).

נגד:  $\exists C > 0 \quad \forall a \in A: |a| \leq C$  : כל  $A$  קטנה מסווגת ככן: