

תרגוי חדוד 27

תכונה: $\min_{x \in [0,1]} f(x) = -1$, $f(0) = f(1) = 0$. שנייה פעמיים $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\max_{x \in [0,1]} f''(x) \geq 8$$

הוכחה: קיימת נק' $\min$ של f ב- $[0,1]$, נבחר x_0 מתקיים $x_0 \neq 0,1$

נפתח פולינום טיזור מכאן $f(x_0) = -1$ נשים x_0 . נשים $f'(x_0) = 0$ מפני שהיא נק' מינימום.

$$f(x) = -1 + 0 \cdot (x - x_0) + \frac{f''(c_x) \cdot (x - x_0)^2}{2!} \quad c_x \in I \text{ יש } x \in I \text{ כך } -$$

$$\frac{2(1+f(x))}{(x-x_0)^2} = f''(c_x) \quad (*)$$

$$\frac{1}{(1-x_0)^2} \geq 4 \quad \text{אם } x_0 \leq \frac{1}{2} \text{ מתקיים: } \frac{1}{(0-x_0)^2} \geq 4 \quad \text{ואם } x_0 \geq \frac{1}{2} \text{ מתקיים: } \frac{1}{(1-x_0)^2} \geq 4$$

ע"י הצבה של $x=0$ או $x=1$ ב- $(*)$ מתקיים נק' C_0 או C_1 שבה:

$$f''(C_0) = \frac{2 \cdot (1+0)}{(0-x_0)^2} \geq 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow \text{על ה-max של הפונקציה השנייה ח"כ} \Rightarrow \text{כן זהירות } 8 \leq$$

$\otimes x_0 \in \mathbb{R}$, נניח ש- $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. נבחר n , אפשר נחשם $P_n(x)$. אפשר נגדור:

$$P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad x \in \mathbb{R} \text{ מתקיים:}$$

$$(1) \text{ נבחר כאן תמיד קוטר! } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{מתקיים: } \forall k: f^{(k)}(0) = 0$$

$$P_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{כל } x \in \mathbb{R} \text{ אם } \forall x \text{ the } P_n(x) = 0 \quad \text{כל } n \text{ מתקיים}$$

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (2) \text{ תכונה:}$$

$$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x) \quad \text{נשים נכ:}$$

$$f = \tilde{f} + \hat{f} \quad \text{אם } f \text{ יתקיים}$$

$$\frac{\tilde{P}_n + \hat{P}_n}{(x-x_0)^n} \rightarrow 0 \quad \text{הרי } P_n(x) = \tilde{P}_n + \hat{P}_n \text{ נ' חזית, הרי}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \cdot (-x)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} ((-1)^k - 1) \Rightarrow \boxed{P_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{-x^{2k+1}}{2k+1} \cdot 2}$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{אם } k \text{ זוגי} \\ -\frac{2}{k} & \text{אם } k \text{ אי-זוגי} \end{cases} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k \quad \text{כאן:}$$

$$P_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{אם } x \in (-1,1) \text{ חזית} \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{מתקיים?}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = 1 \Rightarrow R=1 \quad \text{מתקיים:}$$

$$P_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{אם } x \in (-1,1) \text{ חזית} \quad \text{אם } x \in (-1,1) \text{ חזית}$$

$$P_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{אם } x \in (-1,1) \text{ חזית}$$

*) הסדר של "או הקטן": $n \in \mathbb{N}$ ו- γ יציב. $O(X^n) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{f(x)}{X^n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0\}$.
 הנקודה חיונית: $\frac{1}{X^m} = \frac{1}{X^n} \cdot (X^{n-m})$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{X^m} \in O(X^n)$ אם $n < m$.

הערה: (1) אם $f \in O(X^m)$ ו- $g \in O(X^n)$ אז $f \cdot g \in O(X^{m+n})$.

(2) אם $f \in O(X^m)$ ו- $g \in O(X^n)$ אז $f + g \in O(X^{\min(m,n)})$.
 (3) צמצומים נחשבים (הצטברו בסדר הקטנים): $X^2 \in O(X)$, $X \notin O(X)$, $X \notin O(1)$.

דוגמה: $(X+X^2) \in O(X)$ אבל $X^2 \notin O(X)$.

$$f(x) = x^4 + 5x^2 \in O(X^2) \text{ אבל } \notin O(X^2)$$

$$f(x) = x \cdot \log(x) \in O(X) \text{ אבל } \notin O(X)$$

חישוב גבולות עם טימור

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \sin x - x(1+2x)}{x^3}$$

ניסוח נסיי: "אפשר להחליף את f ב- P_3 , והשווית תהיה $O(X^3)$ (זו הנקודה) נשיטאותה קצרה כי יש $\frac{1}{6}$ ".

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + R_2(x)$$

נחפס את P_3 של $\sin x$.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)$$

$$e^{2x} \sin x - x - 2x^2 = (1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + R_2(x)) \cdot (x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)) - x - 2x^2$$

$$= 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{11}{6}x^3 + [\dots]$$

$$\frac{R_2(x)}{x^3} = \frac{R_2(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0; \quad \frac{R_3(x)}{x^3} = \frac{R_3(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{R_3(x)}{x^3} \cdot e^{2x} = \frac{R_3(x)}{x^3} \cdot e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \cdot 1 = 0$$

קוויות: I (אולי מוכר)

פונקציה $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת קמורה אם $\forall x_1, x_2 \in I$ ו- $\lambda \in [0,1]$ מתקן:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

פונקציה $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת קעורה אם $(-f)$ קמורה.

תכונות:

(1) אם $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה ו- I פתוח $\Leftrightarrow f$ רציפה (קמורה בקטע פתוח $\Leftrightarrow$ רציפה).

(2) נניח $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ שזירה. אז f' מוגדרת $\Leftrightarrow f$ קמורה.

(3) נניח f שזירה פסגה I . אז $f'' \geq 0 \Leftrightarrow f$ קמורה.

חמור תרמוי חדו 27

משפט: $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ קטורות, f צפה, $\lambda \in \mathbb{R}$. $f \circ g$ קטורה.

$$\lambda \in [0, 1], \lambda_1, \lambda_0 \in I \quad \text{ד"ר: } \lambda \in [0, 1]$$

$$g(x_\lambda) \leq \lambda \cdot \overbrace{g(x_1)}^{y_1} + (1-\lambda) \overbrace{g(x_2)}^{y_2} \quad \cdot g \text{ על } \mathcal{H} \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{H}$$

$$f(g(x_\lambda)) \leq f(\lambda y_1) + f((1-\lambda)y_2) =$$

$$= f(y_\lambda) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2) = \lambda f(g(x_1)) + (1-\lambda)f(g(x_2))$$

⊗ ת.ג.: מ3א 3 בדימויות f, g כן ש- g f איננה קטורה.

משפט: יהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה קונוסה. אז:

ב"ל: f קמורה.

ה'אברהם הנשיא':

(I) $\forall k=1, \dots, 2^n$ $p''p' \in \mathcal{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $(\eta, \beta, \gamma, \delta)$

f מקסימלית תהלי קטן $\lambda = \frac{k}{a^n}$.

(II) נראה ש f מקימה תנאי קמיות על $[0, 1]$.

$n \in \mathbb{N}$ ו- $k \in \mathbb{N}$ ו- $0 \leq k \leq 2^n$, $k \in \mathbb{N}$; $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ו- $0 \leq k \leq 2^n$ (I)

f מקסימלית תצא קט'תה (כ) $\lambda \in \mathbb{I}_n$.

נחשב $\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 1^2 = T_1$

33: נניח f מקימת תנאי קמיות ולא $T_n \in \mathcal{H}$. ונעביר להוכיח של f מקימת

צורת λ ו- $\lambda \in T_{n+1}$ | $\lambda \in T_n$ כי מנינו. אחרת $\eta, \bar{z} \in T_n \cap N''$ כן $\lambda = \frac{\eta + \bar{z}}{2}$.

$$\frac{1}{2} - \delta \mid \eta \mid N \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f\left(\frac{\eta x + (1-\eta)y}{2} + \frac{\xi x + (1-\xi)y}{2}\right) \leq \lambda, y \in I \quad \text{wobei } \lambda, \xi \in I$$

$$= \left(\frac{n+2}{2}\right)f(x) + \left(1 - \frac{n+2}{2}\right)f(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \checkmark$$

$(T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n) \quad \lambda \in [0, 1] \cap (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}) \quad x, y \in I$ וס p^n וס N^n וס N וס $f \in C^1(\mathbb{R})$ (II)

בהנחת $\lambda \in [0, 1]$ ו- $\{ \lambda_n \} \subset T$ כך $\lambda_n \rightarrow \lambda$. מתקן: r

$$\text{Prop 3} \quad f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + \overbrace{(1-\lambda_n)f(y)}^{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda x + (1-\lambda)y = z \quad (\forall n, \lambda_n \in T) \quad \square$$

$$f(z) \leq \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda)f(y)$$