חדו"א 25 (תרגול)

משפט קושי: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות, וגזירות ב-(a,b). נניח כי $g'\neq 0$ ב-(a,b), אזי: I $g(a)\neq g(b)$ (Rolle) II יש $c\in(a,b)$ כך ש- $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

תרגיל: הוכיחו:

i) לכל $x\neq 0$: $1-\frac{x^2}{2}<\cos x$ ii) לכל $0<x$: $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$

פתרון:

i) נרצה להוכיח שלכל $x>0$ (כי הפונ' זוגית אז זה מספיק): $f(x)=1-\cos x<\frac{x^2}{2}=g(x)$

נפעיל משפט קושי בקטע $[0,x_0]$, אפשר כי $g'(x)=x$ לא מתאפסת ב-$(0,x_0)$

$\Leftarrow$ קיים $y_0\in(0,x_0)$ כך ש- $\frac{\sin y}{y}=\frac{f'(y)}{g'(y)}=\frac{f(x_0)-f(0)}{g(x_0)-g(0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{1-\cos x_0}{\frac{x^2}{2}}$

וידוע כי $\frac{\sin y}{y}<1$ ולכן $1-\cos x<\frac{x^2}{2}$ כנדרש!

ii) נגדיר ב-$(0,\infty)$: $F(x)=x-\sin x$, $G(x)=\frac{x^3}{6}$ ונרצה להוכיח $F(x)<G(x)$

בתחום או בשקול $\frac{F(x)}{G(x)}<1$ (שתי הפונ' חיוביות בתחום).

נשתמש בקושי בקטע $[0,x_0]$, אפשרי כי הפונ' רציפות, גזירות ו- $G'(x)=\frac{x^2}{2}\neq 0$ ב-$(0,x_0)$.

$\Leftarrow$ נקבל שקיים $y\in(0,x_0)$ כך ש- $\frac{F'(y)}{G'(y)}=\frac{F(x_0)-F(0)}{G(x_0)-G(0)}=\frac{x-\sin x}{\frac{1}{6}x^3}$

$\Updownarrow$

$\frac{1-\cos y}{\frac{1}{2}y^2}<1$ מסעיף קודם ■

נקודות סינגולריות:

תזכורת: נניח $f:(a,b)\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$, ונניח ש-$f$ גזירה ברציפות שם, ושאם:

(i) $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ (ii) $\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$

אז ל-f יש הרחבה גזירה ברציפות ב-(a,b).

תרגיל: עבור אילו ערכים של $a,b,c\in\mathbb{R}$ הפונ' $f(x)=\begin{cases}\cos(ax) & x<0\\ e^{bx+cx^2} & 0\le x\end{cases}$ היא:

⊛ $?C(\mathbb{R})$ ⊛⊛ $?C^1(\mathbb{R})$ ⊛⊛⊛ $?C^2(\mathbb{R})$

$C^k(\mathbb{R})$ גזירה k פעמים והנגזרות רציפות

פתרון: ⊛ נרצה שיתקיים: $1=\lim_{x\to 0^-}\cos(ax)=\lim_{x\to 0^+}e^{bx+cx^2}=1$ כלומר **תמיד!**

⊛⊛ מתי $?C^1(\mathbb{R})$ צריך לוודא שהנגזרות הח"ד שואפות לאותו ערך ב-0: $f'(x)=\begin{cases}-a\sin ax & x<0\\ e^{bx+cx^2}\cdot(b+2cx) & 0<x\end{cases}$

לכן נקבל: $\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-a\cdot 0=0$ ומצד שני $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=1(b+0)=b$ לכן $f\in C^1(\mathbb{R})\iff b=0$ ■

(***) נניח $b=0$. נבדוק לאילו a, c הוא f ב- $C^2(\mathbb{R})$:

$$f''(x)=\begin{cases}-a^2\cos(ax) \\ e^{cx^2}(4c^2x^2+2c)\end{cases}$$

צריך לבדוק (מההגדרות) $\lim_{x\to0^-} f'(x)=\lim_{x\to0^+} f'(x)$ ✓ בדקנו ($b=0$)

כן $\lim_{x\to0^-} f''(x)=\lim_{x\to0^+} f''(x) \iff$

$$\lim_{x\to0^-} f''(x)=-a^2$$

$$\lim_{x\to0^+} f''(x)=2c$$

וכן $f\in C^2(\mathbb{R}) \iff \boxed{\begin{matrix} b=0 \\ 2c=-\frac{a^2}{2}\end{matrix}}$ ∎

לופיטל 3

<u>משפט $(\frac{0}{0})$</u>: נתונות $f,g:(a,b)\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ ונניח: $g,g'\neq0$ ב- I, $f,g\xrightarrow{x\to x_0}0$ אזי אם $\frac{f'(x)}{g'(x)}\xrightarrow{x\to x_0}L$ אזי $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{x\to x_0}L$.

<u>הערות</u>:
① יש גרסה זהה ל- $\frac{\infty}{\infty}$
② יש גרסה זהה ל- $x_0=\infty$
③ $L\in\mathbb{R}$ או $|L|=\infty$
④ אפשר לדבר על גבול חד צדדי.

<u>חשבו עם לופיטל</u>:
① ל- a,b חיוביים: $\lim_{x\to0^+}\frac{\log(\sin(ax))}{\log(\sin(bx))}$ ($f(x)$, $g(x)$)

② $\lim_{x\to0^+} x\cdot\log(e^x-1)$

③ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x}=\infty^0$

④ ל- $0<\alpha$: $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}$

⑤ $\alpha\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}$ ~~$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}$~~

<u>פתרונות</u>:

① מתקיים: $g'(x)=b\cdot\frac{\cos(bx)}{\sin(bx)}$. יש סביבה ימנית של 0 שבה $\log(\sin(bx))\neq0$, $\cot(bx)\cdot b\neq0$

⇐ מעכשיו מספיק לחקור את הנגזרות:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}\cdot\frac{\cos(ax)}{\cos(bx)}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(bx)}{\sin(ax)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

ח"ג רציפות שק"מ

② נרצה למצוא את $\lim_{x\to0^+}\frac{\log(e^x-1)}{x^{-1}}=L$ (אם קיים הגבול מצד ימין של 0 [illegible] והם שונים) תנאי לופיטל $(\frac{\infty}{\infty})$ מתקיימים $(-\frac{1}{x^2},\frac{1}{x}\neq0)$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)}{-x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2e^x}{e^x-1}=\underbrace{\lim_{x\to0^+}(-e^x)}_{-1}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{e^x-1}\overset{L}{=}-1\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{e^x}=-\frac{0}{1}=0$$

③ $\tan x^{2\cos x}=e^{2\cos x\cdot\ln(\tan x)}$ נשתמש ברציפות של e^x ונחקור רק את

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\cos x\cdot\ln(\tan x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2\ln(\tan x)}{(\cos x)^{-1}}=L\ (\leftarrow\text{אם הגבולות קיימים})$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}}{-(\cos x)^{-2}\cdot-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot\cos x}{\sin^2x}=\frac{2\cdot0}{1}=0$$

⇐ לכן הגבול המקורי הוא $e^0=1$ ∎

המשך חדו"א 25:

④ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = L$ (אם הגבול הימני קיים אז גם השמאלי)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

⑤ $\alpha\in\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$

כאשר $\alpha\le 0$ אז מאריתמטיקה מתקבלים שהגבול הוא $+\infty$.

כאשר $\alpha>0$: תנאי לופיטל מתקיימים $(\frac{\infty}{\infty})$ לכן. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} \overset{L}{=} (\dots)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$$

מכך הכל נקבל אחרי $k = \lceil\alpha\rceil$ פעמים שאם מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha-k}}=\infty$ אז מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}=\infty$

בתנאי שכל המספרים α, $\alpha-1$, $\dots$, $(\alpha+1-k)$ חיוביים $\Leftarrow$ כי $\alpha+1-k>0$ $\Leftarrow$ $\alpha>k-1$

נבחר למצוא k כך ש- $\alpha>k-1$ וגם $\alpha-k\le 0$ $\Leftarrow$ $\alpha\in(k-1,k]$ כלומר $k=\lceil\alpha\rceil$ ∎

חשבו את הגבול: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$

⚠

אם נפעיל לופיטל יצא: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ ולזה אין גבול! אבל מכאן לא נובע

שלמקורי אין גבול כי: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

פולינום טיילור: (מסדר n סביב x_0)

נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה n פעמים ב- $x_0\in(a,b)$, אזי ניתן לרשום:

$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ כאשר:

* P_n פולינום ממעלה n כך שלכל $0\le k\le n$: $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$
* או שקול $R_n^{(k)}(x_0)=0$ לכל $k\in\mathbb{N}$

נוסחא ל- P_n: $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k}{k!}$

משפט פאנו: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$

שארית לגרנז': לכל x יש c_x נקודה בין x ל- x_0 כך ש- $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

אם f גזירה $n+1$ פעמים