

חזוניה תרגווי 24

תכנית: נתון זקיון (מוחלט) את $e^x + |x| = f(x)$ בקטע $[2, 4]$

פונקציה f זכורה - $\mathbb{R}$ זכורה. $x_0 = -2, 0, 4$; x זקיון מוחלט $f(x) = 0 \iff$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + 1 & : x > 0 \\ e^x - 1 & : x < 0 \end{cases} \iff f(x) = \begin{cases} e^x + x & : x > 0 \\ e^x - x & : x < 0 \end{cases}$$

אין זקיון בקטע $(0, 4)$ כי הפונקציה תמיד חיובית.

ב- $(-\infty, 0)$ מתקיים $f'(x) < 0$ ולכן אין זקיון ב- $(-\infty, 0)$.

$\iff$ הזקיון יהיה נמצא ב- $[0, 4]$, כלומר:

$$f(-2) = 2 + e^2$$

$$f(0) = 1$$

$$f(4) = 4 + e^4$$

$\Rightarrow \boxed{\min}$

$\Rightarrow \boxed{\max}$

שימויות חתומות:

⊗ הכרחי 0- $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ עולה ממש ב- $(0, \infty)$

$$f(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}}{f(x)} \left[\ln(1 + \frac{1}{x}) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

כיוון 0- f - נקודת שםספק להוכיח $0 < \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} = g(x) \iff g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$
 $x \in (0, \infty)$ כל

כלומר דיסקו של $g' < 0$ ב- $(0, \infty)$ וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

כל x קיים $g(x) < 0$ יתקיים ב- (x_0, ∞) $g(x) \in (-\infty, g(x))$ וזאת ייתכן $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

כן היה דיסקו של g כל $x \in (0, \infty)$

$$\blacksquare \iff g \iff f' < f \iff f \text{ עולה ממש!}$$

⊗ נניח $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ זכירה וזכירה $g = f^2$. הוכיחו שכל $x \in \mathbb{R}$:

g זכירה ב- $x_0 \iff$ לפחות אחת מהבאים מתקיים: (1) f זכירה ב- x_0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\sqrt{h}} = 0 \wedge f(x_0) = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ כיוון

f זכירה ב- $x_0 \iff g$ זכירה כי היא מרכיבה של פונקציה זכירה ב- x_0 .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f^2(x_0+h) - f^2(x_0)}{h} \right| \stackrel{f(x_0)=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f^2(x_0+h)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0+h)}{\sqrt{h}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0+h)}{\sqrt{h}} \right| \right| = 0 \cdot 0 = 0$$

ההצגות מותאמות

כיוון $\Leftarrow$ נניח g שזירה ב- x_0 , כולנו קיים הסבר:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))(f(x_0+h) + f(x_0))}{h}$$

נתק נטקרים. 1. אם f שזירה ב- x_0 אז ס"מנו.

2. נניח f שזירה ב- x_0 ונניח שמתקיים (2):

כולנו לא קיים הסבר $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ f זכיב לכן קיים

הסבר $2f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h) + f(x_0))$ כעת אם $2f(x_0) \neq 0$ אז ניתן להפוך:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{(f(x_0+h) + f(x_0))}$$

$\Rightarrow$ f שזירה ב- x_0 כמתירה זהותה. (הסבר קיים)

בדן $f(x_0) = 0$. במקרה זה ניתן שלק"פ:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h)}{h} = \left(\frac{f(x_0+h)}{\sqrt{|h|}} \right)^2 \cdot \text{sign}(h)$$

כדי $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)}{\sqrt{|h|}} \rightarrow 0$ וכן $\left(\frac{f(x_0+h)}{\sqrt{|h|}} \right)^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$