# חדו"א תרגול 23

* נניח ש-f גזירה ב-a, ויהיו $x_n<a<y_n$ סדרות שמתכנסות ל-a.

הוכיחו ש- $f'(z_n) = \left(\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} f'(a)$

מהנתון: $\exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ אז כמו היינה, לכל סדרה $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$.

$$\frac{f(y_n)-f(a)+f(a)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-x_n} - \frac{f(x_n)-f(a)}{y_n-x_n} =$$

$$= \overbrace{\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}}^{a_n}\cdot\overbrace{\frac{y_n-a}{y_n-x_n}}^{\lambda_n} + \overbrace{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}}^{b_n}\cdot\overbrace{\frac{a-x_n}{y_n-x_n}}^{1-\lambda_n \circledast}$$

עם כך:

$a_n \to f'(a)$

$b_n \to f'(a)$

$\lambda_n\in(0,1)$, $1-\lambda_n$

$\circledast$ $\frac{y_n-a}{y_n-x_n}+\frac{a-x_n}{y_n-x_n}=1$

ומתקיים:

$$\frac{f(x_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \lambda_n a_n + (1-\lambda_n)b_n$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ f'(a)}}{\min\{a_n,b_n\}} \le \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} \le \underset{\substack{\downarrow \\ f'(a)}}{\max\{a_n,b_n\}}$$

$$\Downarrow$$

מסנדביץ' סיימנו ∎

## משפטים צרפתיים:

קיצון מקומי (נגדיר max): $x_0$ מקסימום מקומי של f אם יש סביבה U של $x_0$ שבה לכל $x\in U$; $f(x)\le f(x_0)$.

משפט פרמה: נניח f גזירה ב-$x_0$ ומוגדרת בסביבה של $x_0$, אזי:

$x_0$ קיצון מקומי $\Leftarrow$ $f'(x_0)=0$.

$$\Downarrow$$

משפט רול: f גזירה ב-$(a,b)$, רציפה ב-$[a,b]$, ונניח $f(a)=f(b)$, אזי יש ל-$f'$ שורש ב-$(a,b)$.

$$\Downarrow$$

משפט לגרנז': f גזירה ב-$(a,b)$, רציפה ב-$[a,b]$, קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

מסקנה (יחידות): תהי $f: I\to\mathbb{R}$. אם $f'=0$ לכל x אזי f פונ' קבועה.

מסקנה נוספת: אם $f'=c$ היא פונ' קבועה, אזי $f$ ליניארית

(כי $d=g(x)=f(x)-c\cdot x$ חייבת להיות קבועה).

* תרגיל: נניח ש-$f$ גזירה פעמיים ב-$I$ ויש לה שלושה שורשים.

צ"ל: ל-$f''$ יש שורש ב-$I$.

פתרון: $f, f'$ שתיהן גזירות ב-$I$. ונניח $x_1<x_2<x_3$ שורשים של $f$.

אזי מרול ב- $y_1\in[x_1,x_2]$, $y_2\in[x_2,x_3]$ יש $y_1,y_2$ כך ש- $f'(y_1)=f'(y_2)=0$.

מרול ל-$f'$ ב-$[y_1,y_2]$ קיים $z\in(y_1,y_2)$ (נקודה) כך ש- $f''(z)=0$ ∎

⇓

מסקנה כללית: אם $f$ גזירה $n$ פעמים ב-$I$, ול-$f$ יש $n+1$ שורשים ב-$I$, אז ל-$f^{(n)}$ גם יש שורש אחד לפחות ב-$I$.

* תרגיל: נניח ש- $a_0,\dots a_n\in\mathbb{R}$ כך ש- $\sum_{i=0}^{n}a_i=0$.

הוכיחו שלפולינום $P(x)=a_n\cdot(n+1)x^n+\dots+a_1\cdot 2x+a_0$ $\left(P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i(i+1)\right)$

יש שורש ב-$(0,1)$.

פתרון: נתבונן בפולינום: $Q(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{i+1}=a_nx^{n+1}+\dots+a_0\cdot x$ ומתקיים $Q'=P$.

מתקיים גם: $Q(0)=0+\dots+0=0$ ו- $Q(1)=a_n+\dots+a_0\overset{\text{מהנתון}}{=}0$ ⇐ מרול ל-$Q$,

יש $x\in(0,1)$ כך ש- $P(x)=Q'(x)=0$ ∎

* הוכיחו: למשוואות הבאות פתרון יחיד ב-$\mathbb{R}$:

(1) $x^{13}+7x^5-3=0$: יש לפחות שורש אחד כי המעלה אי זוגית.

נניח שאין יותר: $f'(x)=13\cdot x^{12}+35\cdot x^4-0\overset{x\neq0}{>}0$, ו- $f'(0)=0$, $f(0)=-3$.

לכל $x<0$, $f(x)<0$. נניח ששני פתרונות חיוביים, $y_1<y_2$.

מרול נקבל $f'(z)=0$ ואיכשהו $z>0$ בסתירה לחישוב ∎

(2) $3^x+4^x=5^x$: נגדיר $f(x)=(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x-1$

צ"ל: ל-$f$ יש בדיוק שורש אחד. נשים לב ש- $f(0)=2-1=1>0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=2\cdot0-1=-1<0$

⇐ קיים שורש חיובי אחד לפחות ($x=2$).

שני אפסים יגררו 0 ל-$f'$ (מרול), לכן נראה ש- $f'\neq0$ תמיד.

$f'(x)=(\frac{3}{5})^x\ln(\frac{3}{5})+(\frac{4}{5})^x\ln(\frac{4}{5})\underset{\text{לכל } x\text{, כי}}{<}0$

$\ln\frac{3}{5},\ln\frac{4}{5}<0$. ∎

# המשך חדו"א 23:

הוכיחו: לכל $x,y\in\mathbb{R}$, $|\arctan x-\arctan y|\le|x-y|$

ידוע ש- $0<\arctan(x)'=\frac{1}{1+x^2}\le 1$

(משפט לגראנז') לכל $x,y$ יש $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $|\text{atan}\,x-\text{atan}\,y|=|f'(c)|\cdot|x-y|\le|x-y|$

**הגדרה:** אומרים ש- $f:I\to\mathbb{R}$ היא L-ליפשיץ (או ליפשיץ עם קבוע L) אם קיים קבוע $L\ge0$ כך שלכל $x,y\in I$; $|f(x)-f(y)|\le L\cdot|x-y|$

**טענה:** אם f גזירה ו-f' חסומה ע"י M אזי f היא M ליפשיץ.

ת.ב: האם קיימת פונ' גזירה f, שהיא M-ליפשיץ, ו-f' לא חסומה.

הוכחת הטענה: יהיו $x,y\in I$. מהתנאי, לפי לגראנז' (רק גזירות), קיים $c\in I$ כך ש- $f(x)-f(y)=f'(c)\cdot(x-y)$

לכן $|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\underset{}{\overset{f'\text{ חסומה ע"י }M}{\le}}M\cdot|x-y|$ כנדרש!

**טענה:** אם f היא M-ליפשיץ, אזי f רציפה במ"ש.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ ואז יתקיים: $|f(x)-f(y)|\le M\cdot|x-y|\overset{\text{בחירת }\delta}{<}M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

**מסקנה:** f' חסומה ← f ליפשיץ ← f רציפה במ"ש.

(והתנאי f' חסומה לא הכרחי אפילו לכך ש-f רציפה במ"ש, כמו שראינו מ- $\sqrt{x}$ בקטע $(0,1)$).

**טענה:** $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה, ונניח $f'(x)\xrightarrow{x\to\infty}\infty$ אזי f לא רציפה במ"ש.

הוכחה: שקול למצוא סדרות $x_n,y_n$ כך ש- $x_n-y_n\to0$ אבל $f(x_n)-f(y_n)\not\to0$.

יודעים שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $M_n$ כך שבקטע $[M_n,\infty)$ יתקיים $f'\ge n$.

נבחר $x_n=M_n$, $y_n=M_n+\frac{1}{n}$. מתקיים: $x_n-y_n=-\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

אבל מלגראנז' יש $M_n\le c_n\in(x_n,y_n)$ כך ש- $|f(x_n)-f(y_n)|=|f'(c_n)|\cdot|x_n-y_n|\ge n\cdot|\frac{1}{n}|=1\ne0$

**תרגיל:** (נתון) $f:[0,\infty)$ גזירה ו- $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. קיים $N_1\in\mathbb{R}^+$ כך ש- $x\in[N_1,\infty)\Leftarrow |f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

קיים $N_2\in\mathbb{R}^+$ כך ש- $\left|\frac{f(N_1)}{N_2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. כעת עבור $N=\max\{N_1,N_2\}$, אז $N\le x$:

$$\left|\frac{f(x)-f(N_1)+f(N_1)}{x}\right|\le\left|\frac{f(x)-f(N_1)}{x}\right|+\left|\frac{f(N_1)}{x}\right|\le\left|\frac{f(x)-f(N_1)}{x-N_1}\right|+\left|\frac{f(N_1)}{N}\right|\underset{\text{לגראנז'}}{=}|f'(c)|+\left|\frac{f(N_1)}{N}\right|\underset{N_1\le c}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(הראינו $x\ge N \Rightarrow \frac{f(x)}{x}<\varepsilon$)

## הקשר בין נגזרת ומונוטוניות:

נ"ח $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

(1) $f'\geq 0 \iff f$ עולה ב- $(a,b)$

(2) $f'>0 \Rightarrow f$ עולה ממש ב- $(a,b)$ [אין חץ הפוך כי $f(x)=x^3$ עולה ממש ב- $(-1,1)$ אבל $f'(0)=0$].

⊛ הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

① $\log x < \frac{x}{e}$ עבור $x>0$, $x\neq e$.

פתרון: $f(x)=\log x-\frac{x}{e}$. נראה ששלילית בתחום. נשים לב ש-: $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$

$\Leftarrow$ $f'>0$ ב- $(0,e)$, $f'<0$ ב- $(e,\infty)$

$\Leftarrow$ $f$ עולה ממש ב- $(0,e)$, יורדת ממש ב- $(e,\infty)$

$f$ גם רציפה ב- $e$, לכן: $f$ עולה ממש ב- $(0,e]$, יורדת ממש ב- $[e,\infty)$ מיפקה!

ולכן לכל $x\neq e$; $f(x)<f(e)=0 \Rightarrow \log x-\frac{x}{e}<0$ ∎

⚠ תזכורת: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, $x_0\in(a,b)$ קיצון מקומי, אז:

$f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ מינימום

$f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ מקסימום

⊛ תרגיל: מצאו קיצון מקומי ל:

(1) $f(x)=\frac{\log^2 x}{x}$ (2) $f(x)=|x|\cdot e^{-|x-1|}$

פתרון:

(1) $$f'(x)=\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\log^2 x}{x^2}=\frac{\log x\,(2-\log x)}{x^2}$$

כלומר $f'>0 \iff \log x$ ו- $2-\log x$ עם אותו סימן

• $0<\log x \iff 1<x$ • $0<2-\log x \iff 1<x<e^2$

$0>\log x \iff 0<x<1$ • $0>2-\log x \iff e^2<x$

$\Downarrow$

$f'(x)=0$ רק ב- $x=1$, $x=e^2$

$f'(x)>0$ עבור $x\in(1,e^2)$, $(x\in(0,1)\wedge x\in(e^2,\infty)=\emptyset)$

לכן $f$ יורדת ב- $(0,1]$ (גם) וב- $[e^2,\infty)$, $f$ עולה ב- $[1,e^2]$

$\Leftarrow$ $x_0=1$ נק' מינימום

$x_0=e^2$ נק' מקסימום ∎