

חדול תרגור 22

קריטריון דיניר לרציפות במ"ס: אם נב שתי סדרות x_n, y_n (בתחום ההגדרה

$$y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow (f(x_n) - f(y_n)) \rightarrow 0$$

אם f מתקיימת רציפות במ"ס (אם f מתקיימת תנאי דיניר $\Leftrightarrow f$ רציפה)

חברת נגזרות:

כתי נגזרות:

אם f, g נגזרות ב- x_0 , $\alpha \in \mathbb{R}$, אז נגזרת $\alpha f + g$ ב- x_0 :
 $(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0)$

אם f, g נגזרות אז נגזרת $f \circ g$ ב- x_0 :
 $(f \circ g)'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$
 $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$

אם f נגזרת ב- x_0 ו- g נגזרת ב- x_0 אז נגזרת $f \cdot g$ ב- x_0 :
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

אם f נגזרת ב- x_0 ו- g נגזרת ב- x_0 אז נגזרת $\frac{f}{g}$ ב- x_0 :
 $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

נגזרות בסיסיות:

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\cos'(x) = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\sin'(x) = \cos x$$

$$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$$

תרגיל: חשבו נגזרת של:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = x \cdot |x|$$

עבור $x_0 \neq 0$: f נגזרת ב- x_0 ונגזרת f ב- x_0 היא $f'(x_0) = 2x_0$ (אם $x_0 > 0$) ו- $f'(x_0) = -2x_0$ (אם $x_0 < 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אם $x_0 > 0$: f נגזרת ב- x_0 ונגזרת f ב- x_0 היא $f'(x_0) = 1 + \log x_0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

f נגזרת ב- $x_0 = 0$: נגזרת f ב- $x_0 = 0$ היא $f'(0) = 0$

תרגיל 2:

נניח ש- f רציפה ב- x_0 ונציב $g(x) = f(x) \cdot (x - x_0)$

הריהו ש- g שזירה ב- x_0 נהי $\frac{1}{2} g'(x_0)$

פתרון:
$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot (x - x_0) - 0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{רציף}}{=} f(x_0)$$

טענות מסדר גבוה

אם f שזירה בקטע, אז f' זו פונקציה (לפי שזירה).
אם n, m מסמנים, $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$, ובאנלוגיה גם סדר n , $f^{(n)}$

נצטרך לזכור ש- f

⚠️ ת.ק. נכונה באנלוגיה כזו זיכרון!

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$$

ת.ק. $\left(\frac{\log x}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}} \cdot \left(\log x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$ כאשר

הערה: אם n , $f^{(n)}$ קיימת, אז f חלקה (או C^∞) $f^{(n)} \in C^0(I) = C^n(I)$

הערה: זו הפני השזירה n פעמים בקטע I , ק ש- $f^{(n)}$ רציפה, מכאן $C^n(I)$

⚠️ הערה: $C^{n+1}(I) \subseteq C^n(I)$

הערה: ① קיימת f שזירה, כך ש- f' לא רציפה (נמצא) $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

② f שזירה $\Leftarrow f$ רציפה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

טענה: הפונקציה הבאה היא חלקה ב- $\mathbb{R}$;

הנוכח, $f^{(n)}(0) = 0$; $n \in \mathbb{N}$

סקיצת ההוכחה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

למה 1: נניח פולינום $P(x)$ מתקיים

(הוכחה: מונחים: $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$)

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-x^2} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

למה 2: נניח משה קיים פולינום $P_n(x)$ ק ש-

תרגיל: אם $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בט"ש, אז קיים M ק ש- $|f(x)| \leq M \cdot |x|$