תרגול חזרה 21

רציפות במ"ש:

<u>הגדרה:</u> $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך ש- $|x-y|<\delta \Leftarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

<u>משפט קנטור:</u> $a,b\in\mathbb{R}$ ו-. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי היא רציפה במ"ש.

<u>משפט:</u> $a,b\in\mathbb{R}$. נ"ח $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה. אז:
f רציפה במ"ש ב- (a,b) $\Longleftrightarrow$ קיימים וסופיים הגבולות ב- a^+, b^-.

! <u>הערה:</u> אם $f:B\to\mathbb{R}$, $A\subset B$. אם f רציפה במ"ש אזי $f|_A:A\to\mathbb{R}$ גם רציפה במ"ש

<u>משפט:</u> $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה. אם קיים וסופי הגבול של f ב- ∞, אז f רציפה במ"ש.

! הכיוון השני לא נכון! יש פונ' $f:[0,\infty)$ רציפה במ"ש, ול- f אין גבול סופי ב- ∞ (לדוג' $f(x)=x$).

הוכחת אי רציפות במ"ש:

(1) <u>צ"ל:</u> יש $\varepsilon>0$ עבורו לכל $\delta>0$ יש $x,y\in A$ כך ש- $|x-y|<\delta$ אבל $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$.

(2) באופן שקול: נמצא $x_n,y_n\in A$ כך ש- $|x_n-y_n|\to 0$ אבל $|f(x_n)-f(y_n)|\not\to 0$.

<u>תרגילים:</u>

① <u>e^x ב- $(0,1)$</u>: ל- e^x יש הרחבה רציפה ל- $[0,1]$ ולכן כיוון ש- $(0,1)\subset[0,1]$, היא רציפה במ"ש גם ב- $(0,1)$.

② <u>$\sin\frac{1}{x}$ ב- $(0,1)$</u>: רציפה ב- $(0,1)$ וחסומה <u>אבל</u> לא רציפה במ"ש כי אין גבול ב- 0^+!

③ <u>e^x ב- $(0,\infty)$</u>: לא רציפה במ"ש! נמצא 2 סדרות כך ש- $|x_n-y_n|\to 0$:

$$x_n=\log n,\ y_n=\log(n+1) \Leftarrow e^{y_n}=n+1,\ e^{x_n}=n$$

אך מתקיים: $|y_n-x_n|=|\log(n+1)-\log(n)|=\left|\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right|\xrightarrow[\text{מרציפות ה-log}]{n\to\infty}0$ אבל $|n+1-n|=1\not\to 0$

④ <u>$\log x$ ב- $(1,\infty)$</u>: נניח ש- $x>y>1$. אז: $\log x-\log y=\log\frac{x}{y}\underset{x>y}{=}\log(1+\frac{x}{y}-y)=$
$=\log(1+\frac{x-y}{y})\underset{\text{* מאחור}}{<}2\frac{(x-y)}{y}$

כעת כיוון ש- $\frac{|x-y|}{|y|}<|x-y|$ ניקח $\delta=\min(\underset{\text{מ-*}}{\delta_1},\frac{\varepsilon}{2})$

ואז לכל $|x-y|<\delta$ אז: $\frac{x-y}{y}<\delta_1$, $0<t=\frac{x-y}{y} \Leftarrow 2\frac{x-y}{y}<2\delta<\varepsilon$, $\log x-\log y<\varepsilon$ כנדרש! ∎

* הערה: רוצים להסיק את $\log(1+t)$ ל- $t>0$. נניח שבסביבה ימנית

ש 0 . $t\in(0,+\delta)$ מתקיים: $\log(1+t)<2t$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\log(1+t)}{t}<2$$

$$\Updownarrow$$

יש ~~להם~~ סרוכ $\boxed{\log(1+t)<2t}$ כאשר $t\to0$ $\Leftarrow$ ✓ $\left|\frac{\log(1+t)}{t}-1\right|<1$ { שואף ל-1 כאשר $t\to0$ לכן קיימת סביבה כך ש- $t\in(0,\delta)$ אם יתקיים!

טענה: "הדבקה של רציפות במ"ש היא רציפה במ"ש"

נניח ש- $f:(a,c)\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש בתחומים $(a,b]$ ו- $[b,c)$

($a,b<c$ מספיק או לא), אזי f רציפה במ"ש ב- (a,c).

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. מרציפות במ"ש של f ב-A ו-C. יש $\delta>0$ המינימלי המתאים

ל- $\frac{\varepsilon}{2}$ בכל אחד מהתחומים. לכן אם $x,y\in(a,c)$, המקרה היחיד המעניין הוא שאחד

ב- $(a,b]$ והשני ב- $[b,c)$. נניח אז $x<b<y$ ואז $|x-b|<|x-y|<\delta$

$|y-b|<|x-y|<\delta$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(b)+f(b)-f(y)|\leq|f(x)-f(b)|+|f(b)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כנדרש.

הוכחת המשפט: תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה. אם קיים וסופי הגבול ב-∞ אזי

f רציפה במ"ש.

יהי $\varepsilon>0$. נניח ש- $f(x)\xrightarrow{x\to\infty}L$. לכן קיים M כך ש- $x>M \Leftarrow |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{3}$.

בקטע $[0,M]$ f רציפה ולכן מקנטור רציפה במ"ש. לכן יש $\delta>0$

כך שלכל $x,y\in[0,M]$, אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

נניח כעת $x,y\geq0$ כך ש- $\delta>|x-y|$.

<u>מקרה א'</u>: $x,y\in[0,M]$, טריוויאלי. ✓ $\left(|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon\right)$

<u>מקרה ב'</u>: $x,y\in[M,\infty)$ ואז: ✓ $|f(x)-f(y)|\overset{\Delta}{\leq}|f(x)-L|+|L-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$

<u>מקרה ג'</u>: $x<M<y$: $|f(x)-f(M)|\overset{\text{מקרה א'}}{<}\frac{\varepsilon}{3}$; $|f(M)-f(y)|\overset{\text{מקרה ב'}}{<}\frac{2}{3}\varepsilon$

כך הם משמ"ש: $\underset{\text{כנדרש.}}{✓}$ $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(M)|+|(f(M)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon$ ▨

המשך תרגול #21 (נגזרות)

הגדרה: f גזירה ב-x_0 אם מוגדרת בסביבה של x_0 וגם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\boxed{f'(x):=\lim_{y\to x_0}\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}}$$

נגזרת חד צדדית: f מוגדרת בסביבה ימנית של x_0 אזי היא גזירה מימין ב-x_0 אם הגבול הבא קיים וסופי: $f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{y\to x_0^+}\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y}$

הערות:

1. הנגזרת (אם קיימת) = שיפוע המשיק לגרף של f בנק' x_0.
2. גזירה ב-x_0 $\Leftarrow$ רציפה ב-x_0

$$f(x_0)-f(x)\xrightarrow{x\to x_0}0 \quad \overset{\text{הנ"ל}}{\Leftarrow} \quad \underbrace{\left(\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\right)}_{c \text{ סופי}}\underbrace{(x-x_0)}_{0}\xrightarrow{x\to x_0}0$$

3. f גזירה ב-x_0 $\Longleftrightarrow$ 2 הנגזרות החד"צ קיימות ושוות.
4. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ נקראת גזירה בקטע אם היא גזירה בכל $x_0\in(a,b)$.
5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת גזירה בקטע אם היא גזירה בכל $x_0\in(a,b)$, מימין ב-a ומשמאל ב-b.

כללי גזירה ונגזרות בסיסיות:

1. לינאריות: $(f\pm g)'=f'\pm g'$, $(c\cdot f)'=c\cdot f'$
2. מכפלה ומנה: $(f\cdot g)'=f'g+g'f$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g+g'f}{g^2}$$

3. כלל השרשרת: $(f\circ g)'(x)=(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)=(f'\circ g)\cdot g'$
4. נגזרות בסיסיות: $(\cos x)'=-\sin x$; $(\sin x)'=\cos x$; $(\log x)'=\frac{1}{x}$; $(e^x)'=e^x$; $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

תרגיל (1): חשבו נגזרת של: $f(x)=x\cdot|x|$ - גזירה!

מתקיים: $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ 0 & x=0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ ברור שגזירה ב-$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (כי מוגדרת ע"י x^2).

נראה שגזירה גם ב-0:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}h\to 0$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}-h\to 0$$

גבולות חד"צ שווים $\Leftarrow$ גזירה!

תרגיל 2: $f(x)=\begin{cases} x\log x & x>0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

$$x\log x \xrightarrow{x\to 0^+} 0 \Leftrightarrow \frac{-\log x}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

מסקנה: קיים: f רציפה באפס.

ב- $0<x$: $f'(x)=\log x+\frac{1}{x}\cdot x=\log x+1$

נבדוק גזירות ב- $x=0$ לפי הגדרה: $f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\log x-0}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$

לכן f לא גזירה ב-0!

תרגיל 3: נניח ש- f רציפה ב- x_0. נגדיר: $g(x)=f(x)\cdot(x-x_0)$

הוכיח ש- g גזירה ב- x_0, מהי $g'(x_0)$?

נוכיח לפי הגדרה: $g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot(x-x_0)-0}{(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{f\text{ רציפה}}{=}f(x_0)$

כלומר הגבול קיים ו- g גזירה ב- x_0 וכן $g'(x_0)=f(x_0)$.

הערה: אם $f(x)=|x|$ רציפה באפס, אז $g(x)=(x-0)|x|$ ו- $g'(0)=f(0)=0$!

תרגיל 4: חשבו את הנגזרת של $(\sin x)^{\cos x}$ כשהפונ' מוגדרת, כלומר $\sin x>0$.

$$f(x)=\sin x^{\cos x}=e^{\cos x\cdot\ln\sin x}\Rightarrow f'(x)=e^{\cos x\ln\sin x}\cdot[\cos x\ln\sin x]'=$$

$$=\sin x^{\cos x}\left[-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right].$$

הערה (תרגיל קודם): אם $\overset{\sin x^{\cos x}}{f}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ אפשר להרחיב ל- $x_0=0$ כך שתהיה רציפה.

במקרה זה אפשר לבדוק האם f גזירה מימין ב-0 (וכן!)