חדו"א תרגול 20

משפט ויירשטראס: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה $\Leftarrow$ f חסומה, ומשיגה את חסמיה.

תרגיל: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$. הוכח ש-$f$ מקבלת min/max ב-$\mathbb{R}$.

הוכחת התרגיל: נסמן $g(x)=f(x)-L$. אז g מקבלת min/max $\Leftrightarrow$ f מקבלת max/min.

ו- $\lim_{|x|\to\infty} g(x)=0$

אם $g=0$ אז סיימנו. אחרת יש $x_0\in\mathbb{R}$; $g(x_0)\neq 0$ (בה"כ נניח כי $g(x_0)>0$).

נבחר $\varepsilon=\frac{g(x_0)}{2}$. קיים $M>0$ כך ש- $|x|>M$ ואז $|g(x)|<\varepsilon \overset{\text{מקיים הדבר}}{\Leftarrow} x_0\in[-M,M]$

בקטע $[-M,M]$, לפי ויירשטראס, יש ל-g max (ואם צריך min).

כלומר נק' y_0 כך ש- $|x|\le M \Rightarrow g(x)\le g(y_0)$.

בפרט; $g(y_0) \overset{\varepsilon<2\varepsilon}{>} g(x)$ ~~$x\notin[-M,M]$~~

כלומר $g(x)<g(y_0)$ אם $x\notin[-M,M]$ ∎

משפט ערך הביניים: נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם $f(a)<f(b)$, אז לכל $y\in(f(a),f(b))$ קיים $x\in(a,b)$ כך ש- $f(x)=y$.

ניסוח שקול: f רציפה $\Leftarrow$ התמונה של קטע היא קטע.

מוויירשטראס - תמונה של קטע סגור היא קטע סגור.

טענה: נניח ש- $P(x)=a_nx^n+\dots+a_0$ פולינום ממעלה אי-זוגית, אזי יש ל-P שורש.

הוכחה: $\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\pm\infty$ נובע ישירות מע"ב.

דוגמא: הוכיחו שלמשוואה $2^x=5x$ יש פתרון.

$f(x)=2^x-5x$

תרגיל: $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה. הוכיחו של-f יש נק' שבת (כלומר פתרון למשוואה $f(x)=x$)

פונ' מונוטוניות:

(1) בכל נק' בתחום הגדרה, הגבולות החד"צ קיימים.

(2) אם I קטע מוכל, ו- $f: I \to \mathbb{R}$ רציפה ומונ'