

חדו"א תרגווי 2

מחברת: נעמי שרצה"ס - trinomi@gmail.com

תא 236

אחיזת הדקליות

דקרון כפול: נתונה טענה על מספרים טבעיים $n \in \mathbb{N}$ (אנחנו טבעיים $n \geq 1$).
סכס.

הנחה: מניחים שטענה $n=k$ - נכונה.

צעד: מוכיחים שטענה $n=k+1$ - נכונה.

אי שוויון בינומי

תבנית: הוכיחו כי לכל $x > -1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \geq 1+nx$

הוכחה: יהי $x > -1$, נוכיח את הטענה באינדוקציה על n .

(1) בסיס: $n=1$ $\checkmark$ $(1+x)^1 \geq 1+x$

(2) הנחה: נניח כי $n=k$ נכון $(1+x)^k \geq 1+kx$

(3) צעד: נוכיח עבור $n=k+1$, סומך: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$$(1+k)^{k+1} = (1+k)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx) \cdot (1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x + kx^2$$

(ה"א) $x > -1$ $\Rightarrow$ $kx^2 \geq 0$ וזה נכון

תבנית (הכנה לאי שוויון הממוצעים)

יהיו $a_1, \dots, a_n$ מס' ממשיים כך $\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$

(3) $\sum_{j=1}^n a_j \geq n$, וכן יש שוויון אם ורק אם $a_j = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$

הוכחה (באינדוקציה על n):

(1) בסיס $n=1$: הטענה היא שאם $a_1 = 1$ אז $a_1 \geq 1$ כי $a_1 = 1$

$$n=2: \begin{aligned} a_1 + a_2 &\geq 2 \quad \text{אם} \quad a_1 \cdot a_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2 \quad \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{a_1} \end{aligned}$$

$$a_1^2 - 2a_1 + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow (a_1 - 1)^2 \geq 0$$

נקבע שוויון רק כאשר $a_1 = 1 \Leftrightarrow a_2 = 1$ (בדיוק).

(2) נניח שהטענה נכונה n מס' נוכיח (בנוסף) $n+1$.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} + a_n a_{n+1} + a_n + a_{n+1} \geq n - a_n a_{n+1} + a_n + a_{n+1} \geq n+1$$

(ה"א) $a_n a_{n+1} = 1$

$$a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1} - 1 \geq 0$$

$$(a_n - 1)(1 - a_{n+1}) \geq 0$$

$$\prod_{j=1}^{n+1} a_j = 1, \text{ לפחות אחד } a_j \leq 1 \text{ ולפחות אחד } a_j \geq 1$$

כיוון שהמכפלה

(אחרת - כולם < 1 ואז המכפלה < 1
או כולם > 1 ואז המכפלה > 1)

ניתן את השוויון לאיברים קטנים $a_n \geq 1$, $a_{n+1} \leq 1$ (שינוי סדר)

$$\sqrt{(a_n - 1)(1 - a_{n+1})} \geq 0 \quad \text{ואז אכן מתקיים}$$

הוכחנו יש - $\sum_{j=1}^{n+1} a_j \geq n+1$ מת' יש שוויון?

1) כאשר יש שוויון כשכל שישווה ההנחה לא $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$

$$(a_n - 1)(1 - a_{n+1}) = 0 \quad \text{2) כשכל האחרון}$$

לפחות אחד האחרים $= 1$ נ"ח $a_n = 1$ מהנחתו שהמכפלה

יש כולם $= 1$, $a_j = 1$ האחרון $= 1$

↓

אי שוויון הממוצעים: $a_1, \dots, a_n$ וכל $a_j \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

→ ממוצע חשבוני

← ממוצע גאומטרי

הוכחה: מסקנה מההנחה האחרון.

$$\forall 1 \leq j \leq n: b_j = \frac{a_j}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} \quad \text{א"כ? (נסמן)}$$

$$\prod_{j=1}^n b_j = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} = \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n})^n} = \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = 1$$

↓ לפי ההנחה

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} = \sum_{j=1}^n b_j \geq n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad \blacksquare$$

הערה:

יש שוויון $\Leftrightarrow$ כל a_j שווים זה לזה.