

# חדו"א תרגומי 19

צדדיות וחשיבותם של נקודות:

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \dots + x^n - 1}{x} = n + \binom{n}{2}x + \dots + x^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} n + 0 + \dots = n$$

רציפות: נניח ש- $f$  מוגדרת בסביבה של  $x_0$  ו- $x_0$ .

$f$  נקראת רציפה ב- $x_0$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(1) קיים גבול של  $f$  ב- $x_0$  (2)  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

הצגת: קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}$  נקראת פתוחה אם לכל  $a \in A$  יש קטע  $I$  כזה ש- $a \in I \subseteq A$ .

הצגת: אסטרטגיה לרציפות: פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת רציפה

אם לכל קבוצה  $B \subseteq \mathbb{R}$  פתוחה  $f^{-1}(B)$  פתוחה.

כאשר:  $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$

!! הערה:  $B$  נקראת פתוחה יחסית ל- $A$  אם יש פתוחה  $\tilde{B} \subseteq \mathbb{R}$  כך ש- $B = \tilde{B} \cap A$ .

תכונות של פונקציות רציפות:

(1) חשבון פונ' (רציפות): מחז' מקביל ל- $f \pm g, f \cdot g, f/g, f^g, f \circ g$  רציפות.

(מקביל מחז' מקביל)

(2) פונ' אפסטריות: רציפות בתחום העצומן.

מיון:  $f \in C((a,b)) \iff f$  רציפה בקטע הסגור  $[a,b]$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$ : אם  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ו- $g$  קיים גבול ב- $x_0$ , אזי:

טענה: נניח ש- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ב- $x_0$ , אזי  $f$  רציפה ב- $x_0$  ויש סביבה

של  $x_0$  שבה  $f$  חזקה ממש.

הוכחה: יוצג ש- $\epsilon > 0$  קיימת סביבה כך ש- $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  אז  $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ .

עבור  $\epsilon = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \delta)}{2}$  מקבלים קטע  $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  שבו  $f(x) \in (\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3f(x_0)}{2})$  ופסגה

$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$ .

חשדנות: אם  $f(x) > g(x)$  וקן רציפות (ה- $x_0$ ) אזי:

יש קטע  $I$  סביב  $x_0$  שבו  $f > g$ .

הוכחה: נבחר  $\epsilon = f(x_0) - g(x_0)$  וקבל  $\delta > 0$  כך ש- $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  אז  $f(x) > g(x)$ .

מסגרת קובצת

תכונות: ("פונ' זיפה נקבעת על הקוצה צפופה")

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  זיפות שמצדדות על  $\mathbb{Q}$  (סומר  $\mathbb{Q} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(q) = g(q)$ ) אז:  $f = g$

הוכחה: נכון  $h = f - g$  זיפה.

על  $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$ :  $h(q) = 0$  שתי הוכחות:

(1) יהיו  $x_0 \in \mathbb{R}$ , נניח שהזיפה  $h$  ב- $x_0$  (ה"כ"י  $h(x_0)$ ). נקבע מספר קוצמה

שיש הקדם  $I$  שבו  $f$  חסומה, אבל הרציונליים צפופים בממשיים

זן  $I$  יש רציונליים  $\neq$  סתירה.

(2) נקח  $x_0 \in \mathbb{R}$ . קיימת סדרה של רציונליים  $q_n \rightarrow x_0$  מרצפות: ופירינה  
 $\downarrow$   
 $h(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(q_n) = 0$

ליון על צי רציפות:

(1) אין רציפות סתירה: קיים קבוצה  $f$  ב- $x_0$  אבל:  $f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (חסומים)

(2) סוג כאלו: קיימים קבוצות  $f$  ב- $x_0^+$  ו- $x_0^-$  והם שונים.

(3) סוג נאי: אחת מהקבוצות הנ"ל צדדיות ב- $x_0$  לא קיים אלא קיים וזה סוף.

תכונות:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left( \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} \right) = f(x) \quad \text{נשימה}$$

במענה שונה מ-0 הפונ' רצופה (הי יש)

בטיבה של התנ' ביה הפונ' קבועה).

ב-  $x_0 = 0$  קיים קבוצה מניין:  $+1$ , וכן קיים קבוצה מניין:  $-1$  והם קיימים

אם הם זן כל נק' א. רציפות משה כאלו.

$$\textcircled{2} f(x) = \begin{cases} x & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ב-  $x_0 \neq 0$ : אין קבוצה. נראה נשי הינה - נקח 2 סדרות  $q_n \rightarrow x_0$  ו-  $r_n \rightarrow x_0$  מתקיים:  $f(q_n) = q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$  ו-  $f(r_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  שונים ונסק ב-  $x_0 \neq 0$  היא

הנ' א. רציפות משה II.

ב-  $x_0 = 0$ : נשימה זן 0 -  $|f(x)| \leq |x|$  כיון 0 -  $|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  אזי  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$  (הנכנס)

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^{\lfloor x \rfloor}$$

$$; f: [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3)$$

1.  $1 < n$   $\Rightarrow I_n = [n, n+1)$   $\rightarrow I_0 = [\frac{1}{2}, 1)$  (N0)

$$-1, I_0 = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right) \quad (100)$$

מכיוון ש- $f$  היא פונקציה רגולרית,  $L(f) = n$  ;  $x \in I_n$  כל

$$x \in J_n \Rightarrow \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \frac{f(x) - f(n)}{x - n} \Rightarrow \text{כאשר } x \neq n \text{ אז } \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = n$$

$x \in I_n$

: P-N 3000 3000 3000

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n + (x-n)^n \rightarrow n + 0 = n$$

$$\exists! x_0 = n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \underset{\substack{x \in \mathbb{I}_{n-1} \\ \downarrow}}{n-1 + (x-n+1)^{n-1}} \xrightarrow{x \rightarrow n} n-1 + 1^{n-1} = n$$

← הַמִּסּוּד מְשַׁלֵּם שְׂוֵה סִדּוּר מִיָּמֵינוּ הֵיא וְצִיָּה פֶּרֶץ הַשְּׂמִינָה