

תורת המעצמות

אופן של פונקציה: נתון $f: X \rightarrow Y$ ו- $x_0 \in X$ נקרא f פונקציה שמתחברת ל- x_0

x_0 (פרט אולי נקרא x_0 צמוד). $\exists \ell \in Y$ הוא ערך של f ב- x_0 אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \text{ s.t. } |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad *$$

קושי

$$y_n = f(x_n) \rightarrow \ell \quad x_n \rightarrow x_0 \quad \text{אם } \{x_n\} \subseteq I \quad *$$

ה"נה

משפט: שתי ההצטרפות שקולות.

הערה: אם $\{x_n\} \subseteq I$ ו- $x_n \rightarrow x_0$ מתקיים ש- $f(x_n) \rightarrow \ell$

אם f (המוקד) אז f יש ערך ב- x_0 .

הוכחה: צ"ל שכל הסדרות יש אלוהן עקבות (ואז מהצטרפות הינה יש עקבות).

הה"נה $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ מתקיים ק"מ $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$z_n = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \quad f(x_n) \rightarrow \ell_x, f(y_n) \rightarrow \ell_y$$

$$N = N_{\text{odd}} \cup N_{\text{even}} \quad z_n \rightarrow x_0 \quad \text{מתקיים} \quad z_n = \begin{cases} x_k & n=2k-1 \\ y_k & n=2k \end{cases}$$

זכר מהנתון $f(z_n) \rightarrow \ell_z$, אבל כיון ש- $f(z_n)$ יש 2 ת"ס שמתכנסות

$$\ell_x = \ell_y = \ell_z \quad \text{ומכאן} \quad \ell_x = \ell_y$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-5}{x+4} = -11 \quad \text{תכונה: הוכחנו לפי ההצטרפות העקבות}$$

$$f(x_n) = \frac{2x_n-5}{x_n+4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(-3)-5}{-3+4} \right) = -11 \quad \text{אולי } x_n \rightarrow -3 \quad *$$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{ומכאן } |x_0 - x| < \delta \quad \text{קושי: נניח}$$

$$|f(x) - \ell| = \left| \frac{2x-5}{x+4} + 11 \right| = \left| \frac{2x-5+11x+44}{x+4} \right| = \left| \frac{13x+39}{x+4} \right| = 13 \cdot \frac{|x+3|}{|x+4|}$$

$$\frac{1}{|x+4|} < 2 \quad \text{אם } \frac{1}{2} < |x+4| \quad \text{ואכן } \frac{1}{2} < x+4 \quad \text{אז } -3.5 < -3-\delta < x < -3+\delta$$

$$f < \frac{\varepsilon}{20} \quad \text{אם } p \text{ ו-} q \text{ קטנים } |f(x) - \ell| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{12} = 20 \cdot f \quad \text{אם } |x+3| < \delta < \frac{1}{2}$$

$$\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{20}, \frac{1}{2} \right\} \quad \text{אז } |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{כאן}$$

$$R = \begin{cases} 0 & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \\ \frac{1}{q} & ; x = \frac{p}{q} \rightarrow \text{סדר מבוטא} \end{cases}$$

$$R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ניתנת } R$$

פונקציה רציפה:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, יהי $\epsilon > 0$. אז שק"פ $\delta > 0$ כן $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\Leftrightarrow R(x) < \epsilon$.
 נשתמש בטרנספוזיציה: אם קטע סוף I , ונס משה δ , $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}$

מיוצר R סוף של פונקציה I .

$$\text{בהקטע } [0, 1] \text{ כל } x \notin \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\} \text{ אז } R(x) \neq \frac{1}{n} \text{ כל } n, \text{ דהיינו, דהיינו}$$

$$R(x) \neq \frac{1}{n} \text{ כל } x \notin \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\} \text{ כל } n \text{ כל } [k, k+1]$$

$$\text{אם, כל } k \text{ כל } I \text{ קטע נתון יש סוף של נק' סוף } R(x) = \frac{1}{n}, x \in I$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \epsilon \quad \text{אם } N_0 \leq n \text{ כל } N_0 = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$$

$$\text{בהקטע } (x_0 - 1, x_0 + 1) \text{ יש סוף של נק' סוף } R(x) = \frac{1}{k} \text{ כל } 1 \leq k < N_0$$

$$\text{אם יש סוף של נק' סוף } R(x) < \frac{1}{n} \text{ כל } n < N_0$$

$$\text{בהקטע } (x_0 - 1, x_0 + 1) \text{ יש סוף של נק' סוף } R(x) < \epsilon$$

$$\text{בהקטע } (x_0 - 1, x_0 + 1) \text{ יש סוף של נק' סוף } R(x) < \epsilon$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) \quad \text{אם } x_0 = 0 \text{ נשק' ק"פ לכוונו}$$

$$f(x_n) \rightarrow a \text{ כל } y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0 \text{ נמצא 2 סדרות}$$

$$a \neq b \text{ כל } f(y_n) \rightarrow b$$

$$\text{נבחר } x_n = \frac{1}{n} \text{ כל } \frac{2\pi}{x_n} = 2\pi n \text{ כל } \cos \frac{2\pi}{x_n} = 1 \text{ כל } x_n \rightarrow 0$$

$$f(x_n) = \cos 2\pi n = 1$$

$$\text{נבחר } y_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \text{ כל } \frac{2\pi}{y_n} = \pi + 2\pi n \text{ כל } \cos\left(\frac{2\pi}{y_n}\right) = -1 \text{ כל } y_n \rightarrow 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{y_n}\right) = \cos(2\pi n + \pi) = -1$$

$$\text{אם } f \text{ איננה קטעית, אז } f(x_n) \rightarrow 1 \text{ כל } f(-x_n) \rightarrow -1$$

חומר חזון 17

זכורות אין ב"פ: אומרים - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$: p.c

(ב"ג): אם $x \rightarrow x_0$ מתק'מת $f(x_n) \rightarrow \infty$

חוק: $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ st $|x - x_0| < \delta \Rightarrow M < f(x)$

$$f(x) \in (M, \infty) \Leftrightarrow (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$$

זכור שאין סוף:

זכור סוף שאין סוף (הי"ח): אם $x_n \rightarrow \infty$ מתק'מת $f(x_n) \rightarrow l$

זכור אינסוף שאין סוף (הי"ח): אם $M \in \mathbb{R}$ ק"פ $\tilde{M} \in \mathbb{R}$ ו- $p \in \mathbb{R}$ $M < f(x) \Leftrightarrow \tilde{M} < x$

זכור זה זכור: $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \neq \infty\}$ הוא זכור מניין סוף: אם $x \in \mathbb{R}$

אם סביבה I של l , יש סביבה J של x כך ש-

$$f(x) = l \Leftrightarrow x \in J \cap (x_0, \infty)$$

משפט: זכור x ק"פ $\Leftrightarrow$ ק"פ זכורות מניין ומסוף x והם שווים.

חזון גבולות:

הזכור: פונק' אנומטריות: $\otimes$ טריג' $\sin, \cos, \tan$

$\otimes x^a, x^b$ (אם $a < b$)

$\otimes$ פונק' $\log x$

$\otimes$ סכום, מופנה, הפוך/הרבה של סוגה.

תכונה חשובה של אנומטריות: אם f אנומטרית ו- x סתום (הזכור)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

חזון גבולות:

נ"ח $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$ $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} B$ אז:

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A^B$ (כאשר $A < B$) * טעון הפכו!

$$\otimes (f \pm g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \pm B \quad \otimes$$

$$\otimes (f \cdot g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \cdot B \quad \otimes$$

$$\otimes \left(\frac{f}{g}\right)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{A}{B} \quad \otimes$$

$(B \neq 0)$
נכון וזכור סביבה
סביבה $g(x) \neq 0$

ארכיטקטורה מופשטת:

$$\begin{aligned} \frac{\infty}{0^+} &= \infty & \cdot & \text{אם } x < \infty & x + \infty &= \infty & \cdot & x + \infty &= x + \infty & \cdot & \infty \cdot \infty &= \infty \\ \frac{x}{0^+} &= \infty & \cdot & x < \infty & 0 \cdot 0 &= 0 & \cdot & x < \infty & \cdot & \frac{x}{\infty} &= 0 \\ a^{\infty} &= \infty & : & 1 < a < \infty & \cdot & \infty^x &= \infty & \cdot & x < \infty & \cdot & \infty^{\infty} &= \infty \\ a^{-\infty} &= 0 & & & & 0 < x < 1 & & & & & & \end{aligned}$$

הצגת סדרה:

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$

הצגת סדרה של פונקציות: $f_n(x)$ היא פונקציה מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ו $x \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$