

מדור תורת 16

המשקל משהוא נשקל:

$$\sum \sin nx = B_N(x) \quad \sum a_n \sin(nx) < \infty \quad \text{כאן, } a_n \downarrow 0 \quad -1 \quad x \in (0, \pi) \quad 2$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad \text{שנינו כזהות:}$$

$$|B_N(x)| \cdot \sin \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^N \sin(nx) \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [\cos(n \cdot \frac{x}{2}) - \cos(n \cdot \frac{3x}{2})] = \frac{1}{2} [(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}) + (\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2}) + \dots + (\cos(N \cdot \frac{x}{2}) - \cos(N+1 \cdot \frac{x}{2}))] = \frac{|\cos \frac{x}{2} - \cos(N+1 \cdot \frac{x}{2})|}{2}$$

$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{וכן.} \quad \Leftarrow$$

טור חזקות

רציון ההתכנסות של טורי חזקות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad : (a_n), x_0, x \quad \text{הנתון, } x, x_0$$

משפט: קיים $R \in [0, \infty]$ כך שהטור מתכנס לכל x כזה ש- $|x - x_0| < R$

ומתפזר לכל x כזה ש- $R < |x - x_0|$

$$\boxed{(\lim |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} = R} \quad \text{משפט קושי-הרצטרף:}$$

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{כאן } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad \text{משפט דאלמבר: אם ק"פ}$$

חשוב: מצאנו רציון ההתכנסות: (!) וזכרו לבדוק את הצורות הקטנות.

$$R = 1^{-1} = 1 \Leftarrow \lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim n^{-\frac{1}{n^2}} \Rightarrow 1 \quad a_n = n^{-\frac{1}{n^2}}, x_0 = 2 \quad \text{כאן } \sum \frac{(x-2)^n}{n^{1/n}} \quad \otimes$$

חסכון קטנות וקטנות יפים

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 & n=3k+1 \\ \left(\frac{k+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{3k}} & n=3k \end{cases} \Leftrightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n=3k+1 \\ \frac{k+1}{2^n} & n=3k \end{cases}, x_0 = 0 \quad \text{כאן } \sum \frac{n+1}{2^n} x^{3n} \quad \otimes$$

$$\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2^{1/3}} \Rightarrow R = 2^{1/3}$$

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{(\pi^n + e^n)^{1/n}} \Rightarrow \lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow R = \pi \quad a_n = \frac{n^2}{\pi^n + e^n}, x_0 = 1, \sum \frac{n^2 (x+1)^n}{\pi^n + e^n} \quad \otimes$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow R = \infty \quad ; a_n = \frac{1}{n!}, \sum \frac{x^n}{n!} \quad \otimes$$

פונקציות:

קיים ויחיד $\exists!$
פונקציה זו התאמה חד-חד-חד מ- A ל- B . $\forall a \in A. \exists! b \in B. f(a) = b$

* מחזוריות: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת מחזורית אם קיים $a \in \mathbb{R}$ כך של $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+a) = f(x) \quad \text{נשים } \infty. \text{ אם } a \text{ מחזור אזי } \forall n \in \mathbb{N}: na \text{ מחזור.}$$

אם קיים מחזור מנימי $\frac{a}{\cos \sqrt{2}x}$ אומר ש- f מחזורית עם מחזור a .

תרגיל: חזיתו של $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x$ אין מחזור.

נשים זכ, ש- $f(0) = 1+1=2$ ונניח כי $f(x) \neq 2$ $\forall x \neq 0$.

$$\text{אחר: } \cos x = \cos(\sqrt{2}x) = 1 \quad \leftarrow \cos x = 1, \cos(\sqrt{2}x) = 1 \Rightarrow \cos x + \cos(\sqrt{2}x) = 2$$

קיימים $k, l \in \mathbb{Z}$ כך ש- $l\alpha = \alpha, k\alpha = \sqrt{2}\alpha \Rightarrow \frac{k}{l} = \sqrt{2}$ סתירה.