חדוא - תרגול 15

(המשך)

טורים כלליים - משני סימן

<u>הגדרה:</u> $\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum |a_n|$ מתכנס.

<u>משפט:</u> הטור מתכנס בהחלט ⇐ הטור מתכנס.

<u>הגדרה 2:</u> $\sum a_n$ **מתכנס בתנאי** אם $\sum a_n$ מתכנס אבל $\sum |a_n|$ מתבדר.

<u>דוגמא:</u> ראינו בכיתה $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר אבל $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס.

<u>משפט לייבניץ:</u> $a_n \searrow 0$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

<u>דוגמאות:</u>

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ מתכנס בהחלט? לא. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתבדר.

מתכנס? כן, לפי לייבניץ $a_n = \frac{1}{n+2} \searrow 0$ וכן מתכנס בתנאי.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^4}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ פרמטר).

מתכנס בהחלט? כלומר טור שאיברו חיובי $b_n = \frac{1}{n^4} \geq |a_n| = \frac{|\sin(n\alpha)|}{n^4}$

לכן מהשוואה לטורים חיוביים (הטור מפורסם) $\sum |a_n| < \infty$.

הטור המקורי מתכנס? כן, כי מתכנס בהחלט (משפט).

2⚠ <u>שאלה:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ מתכנס?

<u>תרגיל:</u> ($a_n > 0$), $a_n \searrow 0$. הראו כי לכל $m \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{0 < (-1)^m \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n < a_{m+1}}$$

<u>הוכחה:</u> נניח ש-m אי זוגי (m זוגי - תרגיל!)

$$S_N = (-1)^m \sum_{n=m+1}^{N} (-1)^{n+1} a_n = -\sum_{n=m+1}^{N} (-1)^{n+1} a_n = -\left((-1)^{m+2} a_{m+1} + (-1)^{m+3} a_{m+2} + \ldots + (-1)^{N+1} a_N\right) =$$
$$= \underbrace{a_{m+1} - a_{m+2}}_{>0} + \underbrace{a_{m+3} + \ldots}_{>0} + (-1)^N a_N$$

כלומר עבור $N = m+2k$ כאשר $k \in \mathbb{N}$ (זוגי)-
$$S_{m+2k} = (a_{m+1} - \overset{>0}{a_{m+2}}) + \ldots + (\overset{>0}{a_{m+2k-1} - a_{m+2k}}) > a_{m+1} - a_{m+2} > 0$$

הוכחנו שגם"ס של הסכומים החלקיים $(S_{m+2k})_{k=1}^{\infty}$ מקיים $S_{m+2k} > a_{m+1} - a_{m+2}$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{k\to\infty} S_{m+2k} \geq (a_{m+1} - a_{m+2}) > 0$$

מהסדרה S_N מתכנסת לפי לייבניץ.

אי"ש חזק נשמר בגבול

גם שני (עבור m זוגי). נבחר הפעם תת"ס $N = m+2k+1$:

$$S_{m+2k+1} = a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3} - a_{m+4} + \ldots + a_{m+2k+1} = a_{m+1} + (\underset{<0}{-a_{m+2} + a_{m+3}}) + \ldots + (\underset{<0}{-a_{m+2k} + a_{m+2k+1}}) < a_{m+1} + (-a_{m+2} + a_{m+3})$$
$$\lim_{N\to\infty} S_n \leq a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3} < a_{m+1}$$

טענה: אם משמעטורים, $\sum a_n$ מתכנס בהחלט: $|\sum a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$

הוכחה: נסמן S_n^a, S_n את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum|a_n|$, $\sum a_n$ בהתאמה.

$$|S_n| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \underset{}{\overset{\text{אי-שוויון המשולש ל-}n\text{ מחוברים}}{\le}} \sum_{j=1}^{n}|a_j| = S_n^a$$

$$\downarrow n\to\infty \qquad\qquad \downarrow n\to\infty$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \underset{\text{כי אי שוויון חלש נשמר בגבול.}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

⚠ שוויון יתקיים אם ורק אם כל איברי (a_n) השונים מאפס הם בעלי אותו סימן

משפטי אבל - דיריכלה: a_n, b_n סדרות ($B_n=\sum_{j=1}^{n} b_j$) ונניח:

אבל: B_n מתכנסת, a_n מונוטונית וחסומה

דיריכלה: B_n חסומה, a_n מונוטונית ומתכנסת ל-0

$\Rightarrow$ $\sum a_n b_n$ מתכנס

הערות:

① דיריכלה גורר לייבניץ: (נתונה $a_n \searrow 0$. צ"ל $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס)

ניקח $b_n=(-1)^n$. $B_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j = \begin{cases} -1 & n \text{ אי זוגי} \\ 0 & n \text{ זוגי} \end{cases}$

$\Leftarrow$ B_n חסומה, ונקבל $\sum a_n b_n$ מתכנס.

② אבל $\Rightarrow$ דיריכלה: נניח את תנאי משפט אבל (ומשפט דיריכלה כבר הוכח) ונוכיח את מסקנת משפט אבל:

נתון: $B_n \to B$, $a_n \searrow a \in \mathbb{R}$ (בה"כ, אחרת נקח $-a_n$).

נגדיר $\tilde{a}_n = a_n - a$, עכשיו $\tilde{a}_n \searrow 0$ (מחשבון גבולות) וממשפט דיריכלה נקבל $\sum \tilde{a}_n b_n$ מתכנס (B_n מתכנסת ולכן בוודאי חסומה).

$$a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n \underset{\text{חשבון גבולות}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{(a_n - a)}^{\tilde{a}_n} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n$$

וסכום 2 סדרות מתכנס יתכנס לסכום הגבולות.

המשך חדו"א 315

תרגילים: חקרו התכנסות

① $\sum \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n}$

נשים לב ש- $\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 ; & n=2k \\ 1 ; & n=4k+1 \\ -1 ; & n=4k+3 \end{cases}$

נסמן $B_n=\sum_{n=1}^{N}\sin(\frac{n\pi}{2})$ ומתקיים $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{1,0\}$

$\Downarrow$

B_n חסומה.

ונסמן $a_n=\frac{1}{n} \searrow 0$ ולכן מדיריכלה $\sum \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}$ מתכנסת.

נבדוק בהחלט ?

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}\right| = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{|\sin(\frac{2k+1}{2}\pi)|}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{1}{2k+1} > \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{1}{k+1}$$

$\downarrow$

הטור ההרמוני שידוע שהוא מתבדר, ולכן ממבחן ההשוואה גם S_N מתבדר.

② יהי $x\in(0,\pi)$, ו- $a_n\searrow 0$, הוכח $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)<\infty$?

נסמן ~~$B_{N(x)}$~~ $B_{N(x)}=\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)$, ונוכיח התכנסות של הטור באמצעות דיריכלה, כלומר נוכיח B_N חסומה.

אם $x+iy=z\in\mathbb{C}$ אז נסמן $Im(z)=y$, $Re(z)=x$. תזכורת: $\sum_{n=0}^{N}z^n=\frac{z^{N+1}-1}{z-1}$ $\left(\begin{smallmatrix} z\in\mathbb{C} \\ z\neq 1\end{smallmatrix}\right)$

$$\sum^{N}\sin(nx) = Im\left(\sum(\cos(nx)+i\sin(nx))\right) = Im\left[\sum^{N}e^{inx}\right] =$$

$$= Im\Big[\sum_{n=1}^{N}(\underbrace{e^{ix}}_{z=\cos x+i\sin x})^n\Big] = Im\left(\frac{(e^{ix})^{N+1}-1}{e^{ix}-1}\right) = Im\left[\frac{(e^{ix})^{N+1}-1}{e^{ix}-1}\cdot\frac{e^{-ix}+1}{e^{-x}-1}\right] =$$

אף פעם לא שווה ל-0 כי $x\in(0,\pi)$

$$= Im\left[\frac{e^{ixN}-e^{ix[N+1]}-e^{-ix}+1}{(\cos x-1)^2+\sin^2 x}\right] = \left|\frac{\sin(Nx)-\sin((N+1)x)+\sin x}{2-2\cos x}\right| \leq \frac{3}{2-2\cos x}$$

$\Downarrow$

x קבוע ולכן הסדרה חסומה לכל N כזה.