חדו"א תרגול 14

מבחני התכנסות לטורים חיוביים.

מבחן המנה ומבחן השורש:

מבחן השורש: נתון טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (כלומר $\forall n: 0\le a_n$).

נסמן $l=\limsup \sqrt[n]{a_n}$. אם $l<1 \Leftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ($l=1 \Downarrow$ לא יודעים)

$l>1 \Leftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

הוכחה: $\boxed{\text{נניח } l<1}$. מאפיון של limSup נקבל:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n<N: \sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon$

נשתמש בפרט עבור $\varepsilon=\frac{\cancel{l+1}\ 1-l}{2}$, ונקבל שהמ"מ: $\sqrt[n]{a_n}<l+\frac{1-l}{2}=\frac{l+1}{2}<1$

$\Updownarrow$

המ"מ: $a_n<\underbrace{\left(\frac{1+l}{2}\right)^n}_{b_n}$

⊛ <u>תזכורת</u> - טור מפורסם נוסף הוא ההנדסי: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ מתכנס $\Leftrightarrow |q|<1$

ומעשה מוכיחים כך: $S_N=\sum_{n=0}^{N-1} q^n=\frac{1-q^N}{1-q}\xrightarrow{N\to\infty}\frac{1}{1-q}$

מכאן שיודעים שעבור $|q|<1$: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}}$

$\Leftarrow b_n$ טור הנדסי מתכנס ($q=\frac{1+l}{2}<1$) וממבחן ההשוואה לטורים חיוביים גם a_n מתכנס.

$\boxed{\text{נניח } l>1}$

קיימת תת"ס (a_{n_k}) כך ש- $\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\ge\underbrace{\frac{l+1}{2}}_{l-\varepsilon}>1$ המ"מ.

$\varepsilon=\frac{l-1}{2}$

$\Updownarrow$

$a_{n_k}\ge\underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)}_{q>1}^{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}\infty$ לכן מסנדוויץ' המוכלל נובע ש- $a_{n_k}\to\infty$

לכן וודאי ש- $a_n\not\to 0$ (אחרת זו הייתה סתירה לירושה).

ומכאן ~~שהתנאי~~ לפי התנאי ההכרחי להתכנסות אינו מתקיים לכן $\sum a_n$ מתבדר ■

<u>תזכורת - משפט במבחר</u>: $a_n\ge 0$. אם קיים $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ אז קיים $\lim\sqrt[n]{a_n}=l$

$\Downarrow$

מבחן המנה: $a_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. נניח שקיים הגבול $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$.

- $l<1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- $l>1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

<u>הסבר</u>: אם $l=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים, אז $l=\lim\sqrt[n]{a_n}=\limsup\sqrt[n]{a_n}$ מהנ"ל ומסיקים ממבחן שורש. מה נמצא.

<u>הערה</u>: אם ⊛ $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \overset{\text{תרגיל}}{\Leftarrow} \sum a_n$ מתכנס. ⊛ $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \Leftarrow \sum a_n$ מתבדר!

⊛ $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \overset{\text{תרגיל}}{\Leftarrow}$ לא אומר דבר

אם רוצים להשתמש צריך להוכיח!

דוגמאות:

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$ – זהו טור חיובי. ננסה מבחן המנה: $a_n=\frac{1}{(n!)^2}$

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1/[(n+1)!]^2}{1/[n!]^2}=\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2=\frac{1}{(n+1)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0<1$$

$\Downarrow$

לכן $\sum a_n$ מתכנס.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ – טור חיובי. ננסה מבחן השורש. $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{e}<1$$

לכן הטור מתכנס.

<u>מבחן העיבוי</u>: נתונה סדרה a_n <u>מונוטונית יורדת</u> ל-0.

אזי: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot a_{2^n}<\infty$

⚠ נכונה לכל מספר טבעי $b\in\mathbb{N}$: $\sum a_n<\infty \iff \sum b^n\cdot a_{b^n}<\infty$

<u>דוגמה</u>: האם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log_2 n}$ מתכנס?

<u>תזכורת- log</u>: $a^x=y \Rightarrow x=\log_a(y)$ - במה יש להעלות את a כדי לקבל y?

<u>בסיס</u>: $a\neq 1$, $0<a$

<u>תחום הגדרה</u> ב- $\log_a(y)$: $y>0$

* $a>1$: $\log_a(n)\nearrow$
* $a<1$: $\log_a(n)\searrow$

<u>פתרון</u>- עם מבחן העיבוי: מותר להפעיל כי הסדרה $a_n=\frac{1}{n\log_2(n)}$

מונוט' יורדת ל-0 (בדיקה ישירה, או כי $n\log_2 n$ עולה ל-∞)

כלומר: $\sum\frac{1}{n\log_2 n}<\infty \iff \infty\cancel{<}\infty \quad \sum_{n=2}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^n\log_2 2^n}=\sum\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{הטור ההרמוני}}\longrightarrow\infty$

$\Downarrow$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log_2 n}$ מתבדר.

$\downarrow$

מסקנה: כדאי להשתמש בעיבוי כשיש log בטור.