

תרגור ב חדו"ח

הערה: שיעור בית

* חשבון שגורות $0, \infty$: אפשר להשתמש ממשל.

!! אין חוקים: $\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \cdot \infty$

מכפלה: $\frac{1}{0} = \pm \infty \Leftrightarrow \frac{1}{\pm \infty} = 0$; $\frac{1}{-0} = -\infty \Leftrightarrow \frac{1}{-\infty} = -0$

!! אכן $\frac{1}{0} = ?$ כאשר a יצא אל המרחב חזק, $\frac{1}{0} = ?$ שזית או קופצת

* חוקי שגורות e : אפשר להשתמש ב: $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \rightarrow e$; $(1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$; $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$

טורים

הערה: טור כי סדרה שמוצאת $\sum_{k=1}^n a_k$ כאלו חלקים:

(תונה) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. נגדיר $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. נאמר שהטור מתכנס ל- L אם $S_n \rightarrow L$.

צומת: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ מתכנס?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

השאלה היא האם הטור מתכנס? (כאן כן)

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

$1 = A(k+1) + Bk$ (כאן $x \in \mathbb{R}$)
 $1 = A$ (כאן $x=0$)
 $-1 = B$ (כאן $x=-1$)

הטור מתכנס לסכום 1

כאשר $b_n \rightarrow b$

הערה: טור טנסורים: אם $a_n = b_{n+1} - b_n$ הטור טנסור

$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b - b_1$

משפט: אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז $a_k \rightarrow 0$

("תנאי הכרחי" טאבט טא מנפיק!) להתכנסות טור הט $a_k \rightarrow 0$

תכונות: (תון $\sum a_n$ מונטונית ורצת) הטור $\sum a_n$ מתכנס הטא: $\sum a_n \rightarrow 0$

* קריטריון קושי (טנסור): (טנסור $\sum_{k=1}^n a_k$) $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N, k \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+k} a_k < \epsilon$

פתרון התכונות: קריטריון קושי שישמע. (כאן $\sum a_n \rightarrow 0$)

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \epsilon$ נשתמש בזה כדי להראות כי $a_k \rightarrow 0$

a_n מונטונית ורצת- $\sum a_n < \infty$ הטנסור

משפט

$$n \cdot a_{2n} \leq a_{n+1} + \dots + a_{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \quad \text{מתק"ס:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N: 0 < n \cdot a_{2n} < \varepsilon \quad \text{קרינון:}$$

$$0 < 2n \cdot a_{2n} < 2\varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$\text{לפי הזכרת הסקת הוכחנו} \quad n \rightarrow \infty \quad 2n \cdot a_{2n} \rightarrow 0$$

(!) בעצם הוכחנו שסקור סדרה מונוטונית, $a_n \rightarrow 0$ מתקנים $\Leftrightarrow n a_n \rightarrow 0$

אם ה-3 השני לא בהכרח נקדם!

לוחות התכנסות וטורים חיוביים

(נתון: $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ כאשר $0 \leq a_k$ לכל k הנ"ל. אפשר להשתמש!

$$\otimes \text{ טור מפורסם שטאיו בכיתה: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

משקל ההשוואה: $a_k \leq b_k$, טורים חיוביים, ומתק"ס עבור M

$$a_k \leq M \cdot b_k \quad \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$$

כתיבה נורמלית: $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ $\nearrow$ כי a_k חיוביים

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{מתכנסת} \\ \text{חסומה} \end{array} \right. \Leftrightarrow M \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq S_n \leq M \cdot B$$

מנון עולה זקוק כפי B

$$\Leftarrow \sum a_k \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \sum b_k \text{ מתכנס } ("a_k = \infty" \text{ טור חסום})$$

$$\text{בדוגמה: } \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}) \text{ מתכנס או מתפוצץ?}$$

פתרון: הטור חיובי $\checkmark$ $a_n = 1 - \cos \frac{1}{n} \geq 0$ מהי סריזונלסרית

$$a_n = 1 - \cos(\frac{1}{n}) = 2 \left(\sin(\frac{1}{2n}) \right)^2 \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{2n^2}$$

$$\Leftarrow a_n \leq \frac{1}{2n^2} = b_n \quad \text{מתק"ס } \sum b_n < \infty \quad \text{לכן מהשוואה } \sum a_n < \infty$$

טור מוכר

תרגיל: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0$ הורינו: $\sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum \frac{a_n}{1+a_n} < \infty$

$$0 < \frac{a_n}{1+a_n} \leq \frac{a_n}{1} = a_n \quad (\Leftarrow) \text{ פתרון:}$$

מההנחה בעזרת טור מתכנס, וכן ממבחן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

$$(\Rightarrow) \text{ נתון } \sum \frac{a_n}{1+a_n} \text{ מתכנס}$$

$\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n_k}} + 1} \rightarrow 1 \Leftrightarrow \infty \leftarrow a_{n_k}$ בט מוכח $\Leftarrow$ יש ת"ס $\Leftarrow$ a_n לא חסומה $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתפוצץ

אז זה סיכומה כי $\frac{a_n}{1+a_n}$ שאפת ל-0 (אפילו כזו של טור מתכנס).

מקרה 2: a_n חסומה ממש: $a_n \leq M, M > 0$

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{1+M} \Rightarrow a_n \leq (1+M) \frac{a_n}{1+a_n}$$

וממבחן ההשוואה - סיימנו

הסדר תמונה 13 חידושים

מבחן ההשוואה הזכור: $\sum a_k, \sum b_k$ טורים חיוביים.

ע"י שקיים $\lim \frac{a_k}{b_k} = l$

⊙ $l \in (0, \infty)$ $\Leftrightarrow$ (הטורים $\sum a_k, \sum b_k$ מתכנסים/מתקברים יחד).

⊙ $l = 0$ $\Leftrightarrow \sum b_k$ מתכנס אז $\sum a_k$ מתכנס

⊙ $l = \infty$ $\Leftrightarrow \sum a_k$ מתכנס אז $\sum b_k$ מתכנס.

רעיון עבור $l \in (0, \infty)$: $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow l \Leftrightarrow$ הנ"ל $0 < \varepsilon$

בפרט, $\varepsilon = \frac{l}{2}$: $\frac{l}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3l}{2}$ הנ"ל

$\frac{l}{2} \cdot b_k \leq a_k \leq \frac{3l}{2} \cdot b_k$

$\sum b_k < \infty \Leftrightarrow \sum a_k < \infty$ $\infty = \sum a_k \Leftrightarrow \sum b_k = \infty$

⚠️ עבור $l = 0/\infty$ צומח רק עם $\sum b_k$ בסדר!

בזמנה: $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$ מתכנס או מתקבר?

פתרון: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha = \left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^\alpha = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^\alpha}$ (ניחוש: $\frac{1}{n^{\alpha/2}}$ - השוואה)

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha/2}}} = \frac{n^{\alpha/2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ (שווה איבר של הטור $\frac{1}{n^{\alpha/2}}$ - $\beta = \alpha/2$ אכן מתכנס!)

$\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}} < \infty \Leftrightarrow \sum a_n < \infty$ מבחן ההשוואה הזכור:

$\alpha > 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > 1 \Leftrightarrow$ טור, יצא

כלומר הטור "מתכנס" אכן $\alpha > 2$