

תורת המספרים

סדרות קושי

הגדרה: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת קושי אם: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N: |a_n - a_m| < \varepsilon$

שקול: בהינתן $n, m \in \mathbb{N}$ אפשר לכתוב $m = n + k$ עבור $k \in \mathbb{N}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, \forall k \in \mathbb{N}: |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

!! הערה: לא מספיק ש $|a_{n+1} - a_n| \rightarrow 0$ כדי שיהיה סדרת קושי!

משפט: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת קושי $\Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה מתכנסת

$\forall n \in \mathbb{N}$ תכונת λ (תהיה λ סדרה $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ק"פ $0 < \lambda < 1$ $|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda |a_{n+1} - a_n|$ - ש"ק λ "כזב")

הוכיחו כי a_n מתכנסת וזכורו כי:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \quad \text{עבור } n > N \text{ כל } k \in \mathbb{N} \quad \text{מתק"פ}$$

$$|a_{n+k} - a_n| = |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - a_{n+k-2} + \dots + a_{n+1} - a_n| \leq \sum_{i=1}^k |a_{n+i} - a_{n+i-1}| \leq (\lambda^{n+k-1} + \lambda^{n+k-2} + \dots + \lambda^{n+1}) |a_2 - a_1| =$$

(*) $|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda |a_{n+1} - a_n| < \lambda^2 |a_n - a_{n-1}| < \dots < \lambda^n |a_2 - a_1|$ (בין סדרות מתכנסות)

$$= \lambda^{n-1} (\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \dots + 1) |a_2 - a_1| = \lambda^{n-1} \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} |a_2 - a_1| \stackrel{??}{\leq} \varepsilon$$

כך קרה בסדרה מתכנסת

עבור n מספיק גדול

$$\lambda^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - \lambda} |a_2 - a_1| < \varepsilon \quad \text{מספיק להטות ש-}$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N: \lambda^{n-1} \frac{1}{1 - \lambda} |a_2 - a_1| = \varepsilon_1 < \varepsilon$$

ק"פ $\lambda^n \rightarrow 0$ כנגזר כי $(0 < \lambda < 1)$ (ואז זו סדרת קושי $\Leftrightarrow$ היא מתכנסת)

לוגיקה וקטורים בסדרות

1. סדרות סכמיות:

הגדרה: $A \subseteq \mathbb{R}$ נקראת סדרה סכמית אם $\exists$ סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ המתכנסת

זכור: $L \in A$ $L \in \mathbb{R}$ מתק"פ

עבור n גדול מספיק

באמנות: $(a, b) * (a, b)$ לא סדרה סכמית כי $x_n = a + \frac{1}{n} \rightarrow a \notin (a, b)$

* $[a, b]$ כן סדרה. הוכחה: תהי $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ סדרה ק"פ $a \leq x_n \leq b$ $\forall n$ $x_n \rightarrow L$

כי: $a \leq L \leq b$ וזה נכון כי היחסים שא"ש חזש (שטר) עדיין:

* $\mathbb{Q}$ לא סדרה - יש סדרה של רציונלים שמתכנסת ל- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (למשל, קצת ממש)

* $\mathbb{N}$ לא סדרה - כי סדרה של טבעיים שמתכנסת וזכור ממש היא קבועה $\Leftarrow L \in \mathbb{N}$

משפט: $P(f(a_n))$ היא סדרה (הוחזקו בריתה)

תרגיל: הוכיחו שחיתוך של קט' סמוכות היא קט' סמוכה.

הוכחה:

עבור קט' סמוכות: (3): A, B סמוכות $\Leftrightarrow A \cap B$ סמוכה.

תהי $L \in A \cap B$ $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A \cap B$ $\rightarrow L$ $\Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A$ $\rightarrow L$ $\wedge \exists \{x_n\} \subset B$ $\rightarrow L$

כיון ש- A סמוכה נקט $L \in A$, וכיון ש- B סמוכה $L \in B$

$\Leftarrow$ סה"כ: $L \in A \wedge L \in B \Rightarrow L \in A \cap B$

למספר סופי של קט' סמוכות: $\{A_j\}_{j \in J}$ קט' A_j סמוכה $\forall j \in J$.

תהי $x_n \rightarrow L$ $\wedge \{x_n\} \subset \bigcap_{j \in J} A_j$

כאמור: $\{x_n\} \subset A_j \Rightarrow \forall j \in J, L \in A_j \Leftrightarrow L \in \bigcap_{j \in J} A_j$

② תכונה "שכיחות" או תכונה "המתקיימת כמעט תמיד"

תהי a_n סדרה. תכונה $Q(a_n)$ היא שכיחות $\Leftrightarrow Q(a_n)$ א.ס היא מתקיימת

לאינסוף אינדקסים (ת"ס): $Q(a_n)$ שכיחה $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: Q(a_n)$

$Q(a_n)$ מתקיימת כמעט תמיד א.ס היא מתקיימת $\forall$ אינדקסים חוץ ממס' סופי

כפי (= המ"מ): $Q(a_n)$ כמעט תמיד $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: Q(a_n)$

(! א) כמעט תמיד $\Leftarrow$ שכיחה

טענה: $Q(a_n)$ מתקיימת כמעט תמיד או ששכיחה שכיחה.

הוכחה: נניח ש- Q לא מתקיימת כמעט תמיד, כאמור:

$Q(a_n)$ $\neg$ $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: Q(a_n)$ $\neg$

קצות אומר ש- $Q(a_n)$ שכיחה